

Calcul variațional

Participanți

Constantin Udriște – coordonator

Sorin Comșa, Gloria Cosovici,
Marian Crăciun, Jenică Crînganu,
Narcisa Dumitriu, Pavel Matei,
Ioan Roșca, Octavian Stănășilă,
Antonela Toma

Editura StudIS

adicenter@yahoo.com

Iasi, Sos. Stefan cel Mare, nr.5

Tel./fax: 0232 – 217.754

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

COORDONATOR: CONSTANTIN UDRIȘTE

**Sorin Comșa, Gloria Cosovici, Marian Crăciun, Jenică Crînganu,
Narcisa Dumitriu, Matei Pavel, Ioan Roșca, Stănășilă Octavian
Nicolae, Antonela Toma**

**Calcul variațional / Constantin Udriște, Sorin Comșa, Gloria Cosovici,
Marian Crăciun, Jenică Crînganu, Narcisa Dumitriu, Matei Pavel, Ioan
Roșca, Stănășilă Octavian Nicolae, Antonela Toma - Vatra Dornei :
StudIS, 2013**

Bibliogr.

ISBN: 978-606-624-308-7

- I. Constantin Udriște
- II. Sorin Comșa
- III. Gloria Cosovici
- IV. Marian Crăciun
- V. Jenică Crînganu
- VI. Narcisa Dumitriu
- VII. Matei Pavel
- VIII. Ioan Roșca
- IX. Stănășilă Octavian Nicolae
- X. Antonela Toma

Consilier editorial: Dranca Adrian

Secretar editorial: Moroșanu Paul

Pre-press, tipar digital și finisare:

S.C. ADI CENTER SRL

Șos. Ștefan cel Mare, nr. 5

Tel.: 217 754



Copyright © 2013

Toate drepturile asupra acestei ediții sunt rezervate autorului

PREFAȚĂ

Cartea de față este inclusă în proiectul POSDRU/56/1.2/S/32768, ”*Formarea cadrelor didactice universitare și a studenților în domeniul utilizării unor instrumente moderne de predare- învățare-evaluare pentru disciplinele matematice, în vederea creării de competențe performante și practice pentru piața muncii*”. Realizarea manuscrisului, discuțiile privitoare la îmbunătățirea tematicii și selectarea problemelor se datorează următorului grup de profesori: coordonator- *Constantin Udriște*; membrii- *Sorin Comșa, Gloria Cosovici, Marian Crăciun, Jenică Crînganu, Narcisa Dumitriu, Pavel Matei, Ioan Roșca, Octavian Stănășilă, Antonela Toma*.

Finanțat din Fondul Social European și implementat de către Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului, în colaborare cu The Red Point, Oameni și Companii, Universitatea din București, Universitatea Tehnică de Construcții din București, Universitatea ”Politehnica” din București, Universitatea din Pitești, Universitatea Tehnică ”Gheorghe Asachi” din Iași, Universitatea de Vest din Timișoara, Universitatea ”Dunărea de Jos” din Galați, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, Universitatea ”1 Decembrie 1918” din Alba-Iulia, proiectul contribuie în mod direct la realizarea obiectivului general al *Programului Operațional Sectorial de Dezvoltare a Resurselor Umane ”POSDRU” și se înscrie în domeniul major de intervenție 1.2 Calitate în învățământul superior*. Proiectul are ca obiectiv adaptarea programelor de studii ale disciplinelor matematice la cerințele pieței muncii și crearea de mecanisme și instrumente de extindere a oportunităților de învățare. Evaluarea nevoilor educaționale obiective ale cadrelor didactice și studenților, legate de utilizarea matematicii în învățământul superior, masterate și doctorate, precum și analizarea eficacității și relevanței curriculelor actuale la nivel de performanță și eficiență, în vederea dezvoltării de cunoștințe și competențe pentru studenții care beneficiază de discipline matematice în universități, reprezintă obiective specifice de interes în cadrul proiectului. Dezvoltarea și armonizarea curriculelor universitare ale disciplinelor matematice, conform exigențelor de pe piața muncii, elaborarea și implementarea unui program de formare a cadrelor didactice și a studenților interesați din universitățile partenere, bazat pe dezvoltarea și armonizarea de curriculum, crearea unei

baze de resurse inovative, moderne și funcționale pentru predarea-învățarea-evaluarea în disciplinele matematice pentru învățământul universitar sunt obiectivele specifice care au ca răspuns și materialul de față.

Formarea de competențe cheie de matematică și informatică presupune crearea de abilități de care fiecare student are nevoie pentru dezvoltarea personală, incluziune socială și inserție pe piața muncii. De aceea toate programele disciplinelor de matematică ar trebui să aibă în vedere identificarea și sprijinirea elevilor și studenților potențial talentați la matematică. De altfel, studiul matematicii a evoluat în exigențe până a ajuns să accepte provocarea de a folosi noile tehnologii în procesul de predare-învățare-evaluare pentru a face matematica mai atractivă. În acest context, analiza flexibilității curriculei, însoțită de analiza metodelor și instrumentelor folosite pentru identificarea și motivarea studenților talentați la matematică ar putea răspunde deopotrivă cerințelor de masă, cât și celor de elită.

Viziunea pe termen lung a proiectului precizat anterior preconizează determinarea unor schimbări în abordarea fenomenului matematic pe mai multe planuri: informarea unui număr cât mai mare de membri ai societății în legătură cu rolul și locul matematicii în educația de bază în instrucție și în descoperirile științifice menite să îmbunătățească calitatea vieții, inclusiv popularizarea unor mari descoperiri tehnice și nu numai, în care matematica cea mai avansată a jucat un rol hotărâtor. De asemenea, se urmărește evidențierea a noi motivații solide pentru învățarea și studiul matematicii la nivelele de bază și la nivel de performanță; stimularea creativității și formarea la viitorii cercetători matematicieni a unei atitudini deschise față de însușirea aspectelor specifice din alte științe, în scopul participării cu succes în echipe mixte de cercetare sau a abordării unei cercetări inter și multi-disciplinare; identificarea unor forme de pregătire adecvată de matematică pentru viitorii studenți, beneficiari ai unor discipline matematice, în scopul utilizării la nivel de performanță a aparatului matematic în construirea unei cariere profesionale.

Cursul de Calcul Variațional include tematica ce se predă studenților ingineri. Cea mai extinsă Programa Analitică a acestui curs este în funcțiune la Facultatea de Științe Aplicate din Universitatea Politehnica București. După ce toate capitolele au fost structurate teoretic, am introdus probleme similare cu cele dezbătute la seminarii. Au urmat tentative și variante, până la varianta pe care ne-am decis să o publicăm.

Tematica cursului include: extremele funcționalelor diferențiabile; principii variaționale; modele bazate pe energii; levitație, senzori, dinamică geometrică, mișcarea particulelor, vânt; aplicații ale calculului variațional în elasticitatea

liniara, probleme de calcul variațional.

Grupul de lucru și-a impus punctul de vedere asupra tematicii și asupra tipurilor de raționamente ce merită să fie oferite cititorilor de texte matematizate. Am preferat un limbaj simplificat, specific matematicilor aplicate, trimitând cititorii de matematică pură către bibliografie. Experiența îndelungată ca profesori de matematică în universități tehnice ne îndrituiește să expunem idei dezbrăcate de formalizări excesive, cu mare impact asupra înțelegerii de către cititor a fenomenelor naturale întâlnite în inginerie și economie. În acest sens, modelarea matematică trebuie să fie doar suportul științific de prezentare inteligentă a lumii reale și nu hățișul de noțiuni abstracte specific matematicii pure.

Problemele de nouitate au fost definitive în urma unor discuții repetate cu profesorii implicați în proiect și cu alți colegi interesați de domeniul abordat, cărora le aducem mulțumiri cu cununiță. Suntem deschiși la orice fel de observații sau critici ce aduc beneficii științifice pentru teoriile de calcul variațional.

Ianuarie 2012

Prof. univ. dr. Constantin Udriște

CONȚINUT

PREFAȚĂ	iii
Cap. 1. EXTREMELE FUNCȚIONALELOR DIFERENȚIABILE	1
1 Funcționale diferențiabile	1
2 Extremele funcționalelor diferențiabile	5
3 Variația a doua; condiții suficiente de extrem	13
Bibliografie	17
Cap. 2. PRINCIPII VARIATIONALE	19
1 Probleme cu condiții naturale la frontieră	19
2 Suficiența prin testul Legendre-Jacobi	23
3 Dinamică Lagrangiană unitemporală	26
4 Testul de invexitate	27
5 Dinamică Lagrangiană multitemporală	28
5.1 Cazul funcționalelor integrale multiple	29
5.2 Testul de invexitate	30
5.3 Cazul funcționalelor integrale curbilinii independente de drum	32
5.4 Testul de invexitate	35
Bibliografie	36
Cap. 3. MODELE OPTIMALE BAZATE PE ENERGII	39
1 Problema brachistochronei	39
2 Frânghii, lanțuri și cabluri	41
3 Pendule	42
3.1 Pendulul plan	43
3.2 Pendulul sferic	44
3.3 Pendulul de lungime variabilă	45
3.4 Două pendule interconectate elastic	45

4 Baloane de săpun	48
5 Grinda încastrată	49
6 Ecuația unei microstructuri evolutive	50
7 Evoluția unui sistem format din mai multe particule	51
7.1 Conservarea momentului liniar	52
7.2 Conservarea momentului unghiular	53
7.3 Conservarea energiei	54
7.4 Mișcarea într-un câmp central de forțe	55
8 Coarda vibrantă	58
9 Membrana vibrantă	61
10 Ecuația Schrödinger din mecanica cuantică	64
Bibliografie	65
Cap. 4. LEVITAȚIE, SENZORI, DINAMICA GEOMETRICĂ,		
MIȘCAREA PARTICULELOR, VÂNT	67
1 Levitația magnetică	67
1.1 Subsistemul electric	67
1.2 Subsistemul electromecanic	68
1.3 Modelul neliniar al stărilor	68
1.4 Modelul bidimensional liniarizat al stărilor	69
2 Problema senzorilor	69
2.1 Problema simplificată	70
2.2 Extinderea problemei simplificate	71
3 Mișcarea unei particule în câmpul gravito-vortex nestaționar	72
4 Dinamica geometrică generată de un curent și de o metrică Riemanniană	73
5 Mișcarea particulei încărcate în câmpul electromagnetic	74
5.1 Dinamica geometrică uni-temporală indusă de potențialul vectorial A	76
5.2 Dinamica geometrică uni-temporală produsă de inductia magnetică B	77
5.3 Dinamica geometrică uni-temporală produsă de câmpul electric E	77

5.4 Potențiale asociate formelor electromagnetice	78
5.5 Potential asociat cu 1-forma electrica E	79
5.6 Potențial asociat 1-formei magnetice H	80
5.7 Potențial asociat la 1-forma potential A	80
6 Teoria vânturilor și dinamică geometrică	81
6.1 Dinamică geometrică pendulară și vântul pendular	82
6.2 Dinamica geometrică Lorenz și vântul Lorenz	83
Bibliografie	84
Cap. 5. APLICAȚII ALE CALCULULUI VARIAȚIONAL		
IN ELASTICITATEA LINIARĂ	87
1 Minimul energiei potențiale elastice	87
1.1 Notății și ipoteze	87
1.2 Deformații și tensiuni	89
1.3 EDP de evoluție	90
1.4 Principiu variațional	91
2 Echilibrul unui fir flexibil solicitat de greutatea proprie	95
Bibliografie	100
Cap. 6. PROBLEME DE CALCUL VARIAȚIONAL	105
1 Extremale ale funcționalelor integrale simple	105
2 Extremale ale funcționalelor integrale duble	118
3 Optimizarea unei funcționale integrală simplă condiționată de restricții izoperimetrice	122
4 Condiții suficiente de extrem	126
5 Metoda Ritz	127
6 Probleme Sturm-Liouville	129
7 Geodezice	129
8 Control optimal	130
Bibliografie	131
INDEX DE NOȚIUNI	133

Motto: "Te învață mama minte:
Și i-a dat un ou fierbinte "

Tudor Arghezi - Zdreanță

CAPITOLUL 1

EXTREMELE FUNCȚIONALELOR DIFERENȚIABILE

Calculul variațional are ca scop generalizarea construcțiilor analizei clasice, pentru rezolvarea problemelor de extremum în spații funcționale (extreme de funcții cu o infinitate de variabile). În acest Capitol, introductiv, vom studia problema optimizării funcționalelor (funcții de funcții) diferentiabile pe diverse clase de funcții, dând răspuns la probleme de următorul tip: găsiți drumul cel mai scurt între două puncte ale unei suprafețe, aflați arcul de curbă plană care produce o suprafață de arie minimă la rotirea în jurul unei axe, determinați curba de-alungul careia un punct material alunecă sub efectul gravitației în cel mai scurt timp etc.

1 Funcționale diferentiabile

Să amintim mai întâi definiția funcției diferentiabile din analiza clasică.

Fie o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă funcția $f(x) = f(x^1, \dots, x^n)$ are derivate parțiale continue în raport cu fiecare dintre variabilele x^1, \dots, x^n , atunci la creșterea argumentului cu $h = (h^1, \dots, h^n)$ avem

$$f(x+h) - f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) h^j + r(x, h).$$

Primul termen din membrul drept conține *diferențiala* funcției f în punctul x și reprezintă o formă liniară de creșterea argumentului, vectorul h ; cel de-al doilea termen este abaterea de la aproximarea liniară și este mic în raport cu h , în sensul că

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x, h)}{\|h\|} = 0.$$

Definiția precedentă se poate extinde imediat la cazul funcțiilor între spații vectoriale normate. Fie \mathbf{U}, \mathbf{V} spații vectoriale normate și $f : D \subseteq \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$.

Definiția 1 *Funcția f este diferentiabilă în punctul $x \in D$ dacă există un operator liniar și continuu $L(x, \cdot)$ și o funcție continuă $r(x, \cdot)$ astfel încât pentru orice vector $h \in \mathbf{U}$ să avem*

$$1^0 \quad f(x+h) - f(x) = L(x, h) + r(x, h),$$

$$2^0 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(x, h)}{\|h\|} = 0.$$

Operatorul liniar și continuu $L(x, \cdot)$ este *derivata* funcției f în punctul x .

Pentru un vector $h \in \mathbf{U}$, fixat și $t > 0$, vectorul

$$\delta(x, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \in \mathbf{V},$$

dacă limita există, se numește *variația funcției f în punctul x după direcția h* .

O funcție, de variabile reale, diferențiabilă are derivate după orice direcție. Proprietatea se păstrează și pentru funcții între spații vectoriale normate. Mai exact are loc următoarea

Propoziție Dacă funcția $f : D \subseteq \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ este diferențiabilă în punctul $x \in D$, atunci pentru orice vector $h \in \mathbf{U}$ funcția $f(x + th)$, de variabila reală $t \geq 0$, este derivabilă în raport cu t , pentru $t = 0$ și

$$\frac{df}{dt}(x + th)|_{t=0} = \delta f(x, h) = L(x, h).$$

Demonstrație Derivata căutată este evident $\delta f(x, h)$ și atunci

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt}(x + th)|_{t=0} &= \delta f(x, h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(x, th) + r(x, th)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{tL(x, h) + r(x, th)}{t} \\ &= L(x, h) + \lim_{th \rightarrow 0} \frac{r(x, th)}{\|th\|} \|h\| = L(x, h). \end{aligned}$$

Exemple 1 Orice operator liniar și continuu $T : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{V}$ este, evident, o funcție diferențiabilă în orice punct x și $\delta T(x, h) = L(x, h) = T(h)$ deoarece

$$T(x + h) - T(x) = T(h).$$

În continuare ne vom ocupa numai de *funcționale*, adică $\mathbf{V} = \mathbf{R}$, definite prin integrale.

2 Să considerăm funcționala

$$J(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t)) dt,$$

definită pe spațiul $C[a, b]$ al funcțiilor continue pe segmentul $[a, b]$, înzestrat cu norma convergenței uniforme. *Lagrangianul funcționalei*, funcția $L(t, x)$, este

presupus continuu și cu derivate parțiale de ordinul întâi continue în domeniul $a \leq t \leq b$, $-\infty < x < +\infty$. Să determinăm variația funcționalei $J(x(\cdot))$ când argumentul $x(t)$ crește cu $h(t)$:

$$\Delta J(x(\cdot)) = J(x+h) - J(x) = \int_a^b [L(t, x(t) + h(t)) - L(t, x(t))] dt.$$

Deoarece funcția L este diferențiabilă avem

$$L(t, x+h) - L(t, x) = \frac{\partial L}{\partial x} h + r(t, x, h),$$

unde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(t, x, h)}{h} = 0.$$

De aceea

$$\delta J(x, h) = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t)) h(t) dt.$$

Altfel, conform propoziției precedente și formulei de derivare a integralelor cu parametru, avem

$$\begin{aligned} \delta J(x, h) &= \frac{dJ}{d\varepsilon}(x + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b L(t, x(t) + \varepsilon h(t)) dt|_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t)) h(t) dt. \end{aligned}$$

3 Să considerăm funcționala

$$J(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt,$$

definită pe spațiul $C^1[a, b]$ al funcțiilor cu derivată continuă pe segmentul $[a, b]$, înzestrat cu norma convergenței uniforme a derivatelor. Lagrangianul funcționalei, funcția $L(t, x)$, este presupus continuu și cu derivate parțiale de ordinul întâi continue în domeniul $a \leq t \leq b$, $-\infty < x < +\infty$.

Aplicând formula de derivare a integralelor cu parametru obținem

$$\begin{aligned} \delta J(x, h) &= \frac{dJ}{d\varepsilon}(x + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b L(t, x(t) + \varepsilon h(t), x'(t) + \varepsilon h'(t)) dt|_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) h(t) + \frac{\partial L}{\partial x'}(t, x(t), x'(t)) h'(t) \right] dt. \end{aligned}$$

În mod analog, putem extinde rezultatul la funcționala

$$J(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) dt,$$

definită pe spațiul $C^m[a, b]$ al funcțiilor cu derivate continue până la ordinul m inclusiv, pe segmentul $[a, b]$. Astfel avem

$$\delta J(x, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x} h(t) + \frac{\partial L}{\partial x'} h'(t) + \dots + \frac{\partial L}{\partial x^{(m)}} h^{(m)}(t) \right] dt.$$

4 Putem să considerăm și funcționale care depind de mai multe variabile funcții, de exemplu

$$J(x^1(\cdot), \dots, x^n(\cdot)) = \int_a^b L(t, x^1(t), \dots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t)) dt,$$

definită pe spațiul $(C^1[a, b])^n$, ale cărui elemente sunt funcțiile vectoriale $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, $t \in [a, b]$, cu norma convergenței uniforme a derivatelor

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} [|x^1(t)|, \dots, |x^n(t)|, |\dot{x}^1(t)|, \dots, |\dot{x}^n(t)|].$$

Presupunând că Lagrangianul L are derivate parțiale continue, notând $h(t) = (h^1(t), \dots, h^n(t))$, obținem pentru variația funcționalei J ,

$$\delta J(x, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x^1} h^1(t) + \dots + \frac{\partial L}{\partial x^n} h^n(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^1} \dot{h}^1(t) + \dots + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^n} \dot{h}^n(t) \right] dt.$$

5 În final, să considerăm funcționale ale căror argumente sunt funcții de mai multe variabile reale. Ca exemplu vom lua, mai întâi, funcționala integrală dublă

$$J(w(\cdot)) = \int_{\Omega} L(x, y, w(x, y), w_x(x, y), w_y(x, y)) dx dy,$$

unde am notat pentru prescurtare

$$w_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_y = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Funcționala este definită pe spațiul $C^1(\Omega)$ al funcțiilor cu derivate parțiale continue pe domeniul compact $\Omega \subseteq R^2$, în acest spațiu norma fiind dată prin

$$\|w\| = \max_{(x, y) \in \Omega} [|w(x, y)|, |w_x(x, y)|, |w_y(x, y)|].$$

Presupunând că Lagrangianul L are derivate parțiale continue, variația funcționalei J la creșterea argumentului w cu $h(x, y)$ este

$$\begin{aligned} \delta J(x, h) &= \frac{dJ}{d\varepsilon}(x + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} L(x, y, w + \varepsilon h, w_x + \varepsilon h_x, w_y + \varepsilon h_y) dx dy|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial w} h + \frac{\partial L}{\partial w_x} h_x + \frac{\partial L}{\partial w_y} h_y \right) dx dy. \end{aligned}$$

Un alt exemplu îl constituie funcționala integrală curbilinie (in)dependentă de drum

$$\begin{aligned} J(w(\cdot)) &= \int_{\Gamma} [L_1(x, y, w(x, y), w_x(x, y), w_y(x, y)) dx + \\ &\quad + L_2(x, y, w(x, y), w_x(x, y), w_y(x, y)) dy], \end{aligned}$$

unde Γ este o curbă de clasă C^1 pe porțiuni care unește două puncte fixate într-un domeniu compact $\Omega \subseteq R^2$.

În mod analog, la creșterea argumentului funcției cu $h(x, y)$, variația funcționalei este

$$\delta J(x, h) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial L_1}{\partial w} h + \frac{\partial L_1}{\partial w_x} h_x + \frac{\partial L_1}{\partial w_y} h_y \right) dx + \left(\frac{\partial L_2}{\partial w} h + \frac{\partial L_2}{\partial w_x} h_x + \frac{\partial L_2}{\partial w_y} h_y \right) dy.$$

2 Extremele funcționalelor diferențiabile

Fie o funcțională $J : D \subseteq \mathbf{U} \rightarrow R$, definită pe o submulțime D a spațiului vectorial normat \mathbf{U} .

Prin definiție, funcționala J are un *minim (relativ)* în punctul x_0 din D , dacă există o vecinătate V , a punctului x_0 , astfel încât

$$J(x_0) \leq J(x), \quad \forall x \in V \cap D.$$

Dacă punctul x_0 are o vecinătate V , în care are loc inegalitatea contrară

$$J(x_0) \geq J(x), \quad \forall x \in V \cap D,$$

spunem că x_0 este punct de *maxim (local)* pentru funcționala J . Punctele de minim sau de maxim se numesc puncte de *extrem (relativ)*.

În analiza clasică, punctele de extrem ale unei funcții diferențiabile se găsesc printre punctele critice, adică printre punctele care anulează derivatele

de primul ordin. O proprietate asemănătoare are loc și în cazul funcționalelor pe spații vectoriale normate.

Propoziție Dacă x este un punct de extrem pentru funcționala J , interior mulțimii D și dacă J este diferențiabilă în acest punct, atunci $\delta J(x, h) = 0$ pentru orice creștere h .

Demonstrație Fie h o creștere a argumentului x ; deoarece x este punct interior al mulțimii D , funcția $J(x + th)$ de variabila reală t este definită pe întreg intervalul $[-1, 1]$. Această funcție are în $t = 0$ un punct de extrem și este derivabilă în acest punct. Atunci derivata ei se anulează în $t = 0$. Rezultă

$$\delta J(x, h) = \left. \frac{dJ(x + th)}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Orice punct x în care variația $\delta J(x, h)$ a funcționalei J se anulează identic în raport cu h se numește *punct staționar* sau *punct critic* al funcționalei.

Deci, pentru stabilirea punctelor de extrem ale unei funcționale trebuie exprimată variația $\delta J(x, h)$, determinate punctele critice (cele în care variația se anulează identic în raport cu h) și apoi alese dintre acestea punctele de maxim și/sau de minim.

Comentariu Variația $\delta J(x, h)$ a funcționalei J este o funcțională liniară și continuă pe spațiul vectorial normat \mathbf{U} pe care este definită J . Mulțimea \mathbf{U}^* a tuturor funcționalelor liniare și continue pe \mathbf{U} se numește *spațiul dual*. Astfel evaluarea variației unei funcționale impune existența unor teoreme de reprezentare pentru spațiul dual.

De exemplu, pentru orice funcțională liniară $L : R^n \rightarrow R$ există un vector $a = (a_1, \dots, a_n) \in R^n$ astfel încât

$$L(h) = a_1 h^1 + \dots + a_n h^n = a_i h^i, \quad \forall h \in R^n.$$

De asemenea, orice funcțională liniară și continuă $L : C[a, b] \rightarrow R$, pe spațiul funcțiilor continue, se poate scrie sub forma

$$L(h) = \int_a^b h(t) dg_L(t),$$

unde g_L este o funcție cu variație mărginită și continuă la dreapta (*F. Riesz*).

Pentru continuarea programului de determinare a punctelor de extrem, anularea identică a variației întâia, avem nevoie de următorul rezultat.

Lema fundamentală a calculului variațional Dacă x este o funcție continuă pe intervalul $[a, b]$ și dacă pentru orice funcție continuă h este adevărată egalitatea

$$\int_a^b x(t)h(t)dt = 0,$$

atunci $x(t) = 0, \forall t \in [a, b]$.

Demonstrație O primă demonstrație, elementară dar complet neinteresantă pentru cele ce urmează, se obține utilizând metodele produsului scalar: luăm $h = x$ și obținem $\int_a^b (x(t))^2 dt = 0$, ceea ce pentru funcția continuă x implică $x(t) = 0, \forall t \in [a, b]$.

Expunem acum o altă demonstrație, constructivă și foarte utilă pentru considerațiile ulterioare. Să presupunem că ar exista un punct $t_0 \in [a, b]$ în care $x(t_0) \neq 0$. Fie $x(t_0) > 0$. Atunci există o vecinătate $V = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, a lui t_0 în care $x(t) > 0$. Să considerăm o funcție continuă h , strict pozitivă în vecinătatea V și nulă în afara acesteia (de exemplu, $h(t) = (t - t_0 + \varepsilon)(t_0 + \varepsilon - t)$ pentru $t \in V$). Atunci

$$\int_a^b x(t)h(t)dt = \int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} x(t)h(t)dt > 0,$$

ceea ce contrazice ipoteza și încheie demonstrația lemei.

Observații 1 Mulțimea de funcții h pentru care trebuie verificată egalitatea din lema poate fi deseori redusă. După cum se vede din demonstrația lemei fundamentale, funcțiilor h le putem impune condiții de derivabilitate de orice ordin, anularea spre capetele intervalului etc. Esențial este ca pentru orice $t \in [a, b]$ și orice $\varepsilon > 0$ să existe în mulțimea funcțiilor test o funcție strict pozitivă în intervalul $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ și nulă în rest.

2 Într-o formulare asemănătoare și cu modificări evidente ale demonstrației, lema fundamentală a calculului variațional se menține în vigoare și pentru funcții de mai multe variabile.

3 De asemenea, putem observa ca în construcțiile precedente este suficient ca funcționala J să fie definită pe o varietate liniară sau cel puțin pe o mulțime convexă: odată cu două puncte x și $x + h$ să se afe în mulțimea de definiție și toate punctele de forma $x + th$ pentru orice $t \in R$ sau măcar $t \in [-1, 1]$.

Exercițiu Fie x o funcție de clasă C^k pe intervalul $[a, b]$. Dacă pentru orice $h \in C^k[a, b]$ este adevărată egalitatea

$$\int_a^b x(t) h^{(k)}(t) dt = 0,$$

atunci x este un polinom de $grad \leq k - 1$.

Soluție Proprietatea " x este un polinom de $grad \leq k - 1$ " este echivalentă cu " $x^{(k)} = 0$, pentru orice $t \in [a, b]$ ". Ne inspirăm din demonstrația lemei fundamentale. Să presupunem că ar exista un punct $t_0 \in [a, b]$ în care $x^{(k)}(t_0) \neq 0$. Fie $x^{(k)}(t_0) > 0$. Atunci există o vecinătate $V = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, a lui t_0 în care $x^{(k)} > 0$. Să considerăm funcția $h \in C^k[a, b]$ definită prin

$h(t) = (t - t_0 + \varepsilon)^k (t_0 + \varepsilon - x)^k$, pentru $t \in V$ și nulă în rest. Presupunând că $V \subset (a, b)$, funcția h , împreună cu primele $k - 1$ derivate, este nulă în a și b . Integrând de k ori prin părți se obține

$$\begin{aligned} \int_a^b x(t)h^{(k)}(t)dt &= x(t)h^{(k-1)}(t)|_a^b - \int_a^b x'(t)h^{k-1}(t)dt = \dots \\ &= (-1)^k \int_a^b x^{(k)}(t)h(t)dt = (-1)^k \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} x^{(k)}(t)h(t)dt \neq 0, \end{aligned}$$

(> 0 sau < 0 după cum k este par sau impar) ceea ce contrazice ipoteza.

Să examinăm depistarea punctelor critice pentru funcțiile ale căror variații au fost determinate în secțiunea precedentă.

1. Evident, o funcțională liniară și continuă $T : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{R}$, nenulă, nu are puncte critice.

2. Pentru funcțiile de tipul

$$J(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t))dt,$$

variația este dată de formula (1). Atunci, aplicând lema fundamentală obținem ecuația

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t)) = 0. \quad (7)$$

Ecuația de mai sus se poate rezolva, conform teoremei funcțiilor implicite, obținându-se soluții $x = x(t)$, în jurul punctelor (x_0, y_0) în care

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t_0, x_0) = 0 \text{ și } \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(t_0, x_0) \neq 0.$$

3. Un loc aparte, generic în calculul variațional, îl au funcțiile de tipul

$$J(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))dt.$$

Variația acesteia este dată de formula (2):

$$\delta J(x, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t))h(t) + \frac{\partial L}{\partial x'}(t, x(t), x'(t))h'(t) \right] dt.$$

Integrând prin părți cel de-al doilea termen, variația capătă forma

$$\delta J(x, h) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) \right] h(t) dt + \frac{\partial L}{\partial x'} h(t)|_a^b.$$

Pentru ca x să fie punct de extrem trebuie să avem $\delta J(x, h) = 0$, identic în raport cu $h(t)$. Întrucât printre variațiile h se găsesc și acelea pentru care $h(a) = h(b) = 0$, uzând de observațiile la lema fundamentală, obținem că funcția x care realizează extremul trebuie să verifice ecuația (diferențială de cel mult ordinul doi)

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) = 0. \quad (8)$$

Ecuația de mai sus se numește *ecuația Euler - Lagrange*; soluțiile sale se numesc *extremale* ale funcționalei date.

Deci, *funcțiile x care realizează un extrem se găsesc printre extremalele funcționalei.*

Ecuația (8) se scrie explicit

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x' \partial x'} x'' + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x'} x' + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial x'} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0.$$

Dacă $\frac{\partial^2 L}{\partial x' \partial x'} \neq 0$, atunci soluția generală a acestei ecuații, de ordinul doi, depinde de două constante arbitrare, astfel că pentru alegerea unei anumite soluții trebuie să impunem condiții suplimentare.

Extremale cu capete fixe. Impunem extremalelor valori date la capetele intervalului de integrare: $x(a) = x_1$, $x(b) = x_2$. În acest caz avem numai $h(a) = h(b) = 0$ și condiția necesară de extrem se reduce la ecuația Euler - Lagrange (8). Aceasta împreună cu condițiile la capete determină, în general, o extremală unică.

Extremale cu ordonate libere la capete. Să presupunem fixat numai $x(a) = x_1$. Atunci, în urma ecuației Euler - Lagrange rămâne condiția $\frac{\partial L}{\partial x'} h(b) = 0$. Deoarece $h(b)$ este arbitrar, se obține ca o a doua condiție $\frac{\partial L}{\partial x'}(b, x(b), x'(b)) = 0$. În acest fel obținem din nou o extremală unică. Ultima egalitate se numește *condiție la limită naturală*.

Evident, dacă lăsăm libere ordonatele în ambele capete, vom obține două condiții la limită naturale.

Extremale cu capete pe curbe date. Să presupunem din nou $x(a) = x_1$, iar capătul din dreapta al graficului extremalei variabil pe o curbă dată $x = g(t)$. În acest caz funcționala $J(x(\cdot))$ devine o integrală cu limita superioară variabilă. Pentru variația funcționalei obținem, aplicând formula de derivare a integralelor cu parametru,

$$\delta J(x, h) = \frac{dJ}{d\varepsilon}(x + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^{b(\varepsilon)} L(t, x(t) + \varepsilon h(t), x'(t) + \varepsilon h'(t)) dt \Big|_{\varepsilon=0} = \\
&= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) h(t) + \frac{\partial L}{\partial x'}(t, x(t), x'(t)) h'(t) \right] dt + L(b, x(b), x'(b)) b'(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0},
\end{aligned}$$

unde b este dat de egalitatea $x(b) = g(b)$.

Pentru a evalua $b'(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$, utilizăm condiția pe capătul din dreapta, adică

$$x(b(\varepsilon)) + \varepsilon h(b(\varepsilon)) = g(b(\varepsilon)).$$

Derivând, în raport cu ε și punând $\varepsilon = 0$, obținem

$$x'(b) b'(0) + h(b) = g'(b) b'(0),$$

de unde

$$b'(0) = \frac{h(b)}{g'(b) - x'(b)}.$$

Atunci, după o integrare prin părți și observația că putem lua $h(a) = 0$, găsim

$$\begin{aligned}
\delta J(x, h) &= \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) \right] h(t) dt + \\
&+ \left[\frac{\partial L}{\partial x'}(b, x(b), x'(b)) - \frac{L(b, x(b), x'(b))}{g'(b) - x'(b)} \right] h(b).
\end{aligned}$$

Deoarece variația h este arbitrară, obținem, ca mai înainte, ecuația Euler - Lagrange (8) și apoi *condiția de transversalitate*

$$\frac{\partial L}{\partial x'}(b, x(b), x'(b)) - \frac{L(b, x(b), x'(b))}{g'(b) - x'(b)} = 0. \quad (9)$$

(Condiția de transversalitate impune $g'(b) - x'(b) \neq 0$, adică extremala și curba $x = g(t)$ să nu fie tangente în punctul de contact.)

Evident, dacă și capătul din dreapta al graficului extremalei este variabil pe o curbă dată $x = f(t)$, vom avea și în acest capăt o condiție similară de transversalitate

$$\frac{\partial L}{\partial x'}(a, x(a), x'(a)) - \frac{L(a, x(a), x'(a))}{f'(a) - x'(a)} = 0,$$

unde a este dat de egalitatea $x(a) = f(a)$.

Rezultatele se extind pentru funcționale cu derivate de ordin superior,

$$J(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t)) dt,$$

plecând de la expresia (3) a variației. Integrând prin părți de mai multe ori și utilizând lema fundamentală, ecuația Euler - Lagrange capătă forma

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial x''} \right) - \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \left(\frac{\partial L}{\partial x^{(m)}} \right) = 0, \quad (10)$$

o ecuație diferențială de ordinul $2m$.

4 Pentru funcționale care depind de mai multe variabile funcții

$$J(x^1(\cdot), \dots, x^n(\cdot)) = \int_a^b L(t, x^1(t), \dots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t)) dt,$$

extremalele sunt date de un sistem de ecuații Euler - Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Problemele la care sunt supuse extremalele se pun și se rezolvă ca în cazul precedent.

5 În cazul funcționalelor integrală multiplă

$$J(w(\cdot)) = \int \int_{\Omega} L(x, y, w(x, y), w_x(x, y), w_y(x, y)) dx dy,$$

variația este dată de relația (5). Integrând prin părți și utilizând formula lui Green obținem

$$\begin{aligned} \delta J(w, h) &= \int \int_{\Omega} \left[\frac{\partial L}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial w_y} \right) \right] h(x, y) dx dy + \\ &\quad + \int \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w_x} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial w_y} h \right) \right] dx dy = \\ &= \int \int_{\Omega} \left[\frac{\partial L}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial w_y} \right) \right] h(x, y) dx dy + \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} h(x, y) \left(-\frac{\partial L}{\partial w_y} dx + \frac{\partial L}{\partial w_x} dy \right), \end{aligned}$$

unde $\partial\Omega$ reprezintă frontiera domeniului Ω .

Dacă funcția w este punct de extrem, trebuie să avem $\delta J(w, h) = 0$, identic în raport cu h . Ținând cont că avem variații h nule pe frontiera $\partial\Omega$, aplicăm lema fundamentală precum și observațiile ce o însoțesc. Găsim că funcția w

trebuie să verifice ecuația cu derivate parțiale (de ordinul doi), numită *ecuația Euler - Ostrogradski*,

$$\frac{\partial L}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial w_y} \right) = 0. \quad (12)$$

Soluțiile acestei ecuații se numesc *suprafețe extreme*; orice punct de extrem este o suprafață extremală.

În final să examinăm extremele funcției integrale curbilinie

$$J(w(\cdot)) = \int_{\Gamma} [L_1(x, y, w(x, y), w_x(x, y), w_y(x, y)) dx + \\ + L_2(x, y, w(x, y), w_x(x, y), w_y(x, y)) dy],$$

unde Γ este o curbă de clasă C^1 pe porțiuni care unește două puncte fixate A, B într-un domeniu compact $\Omega \subseteq R^2$.

Variația acestei funcții este dată de formula (6) care, după o integrare prin părți devine

$$\delta J(w, h) = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial L_1}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L_1}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L_1}{\partial w_y} \right) \right] h dx + \\ \left[\frac{\partial L_2}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L_2}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L_2}{\partial w_y} \right) \right] h dy + \\ + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L_1}{\partial w_x} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L_1}{\partial w_y} h \right) \right] dx + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L_2}{\partial w_x} h \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L_2}{\partial w_y} h \right) \right] dy.$$

Pentru a avea un extrem este necesar să anulăm, identic în raport cu h , variația $\delta J(w, h)$. În acest scop folosim variații h , cu $h(A) = h(B) = 0$, pentru care

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L_1}{\partial w_y} h \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L_2}{\partial w_x} h \right).$$

Sistemul de mai sus are întotdeauna soluție fiind de tip *factor integrant*. Pentru dimensiuni mai mari, superioare lui 2, situația este ceva mai complicată și va fi rezolvată în capitolele următoare.

Astfel condiția de punct critic devine

$$\int_{\Gamma} \left[\frac{\partial L_1}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L_1}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L_1}{\partial w_y} \right) \right] h dx +$$

$$+ \left[\frac{\partial L_2}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L_2}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L_2}{\partial w_y} \right) \right] h dy = 0,$$

pentru orice variație h în condițiile precedente.

Va trebui să distigem două situații după cum integrala este luată pe o curbă fixată sau este independentă de drum. Vom face, pentru prescurtare, următoarele notații:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{\partial L_1}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L_1}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L_1}{\partial w_y} \right), \\ \mathcal{L}_2 &= \frac{\partial L_2}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L_2}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L_2}{\partial w_y} \right), \\ \mathcal{L} &= (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2). \end{aligned}$$

a) Dacă integrala este luată pe un drum fixat $\Gamma : x = x(t), y = y(t)$, iar $\tau = (\dot{x}, \dot{y})$ este câmpul viteză al curbei, condiția de punct critic este ortogonalitatea pe Γ a câmpurilor \mathcal{L} și τ , adică,

$$\mathcal{L}_1 \dot{x} + \mathcal{L}_2 \dot{y} = 0. \quad (13)$$

b) Dacă funcționala este independentă de drum, condiția de punct critic (13) trebuie să fie îndeplinită pentru orice vector τ și atunci obținem sistemul

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L_1}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L_1}{\partial w_y} \right) &= 0 \\ \frac{\partial L_2}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L_2}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L_2}{\partial w_y} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

3 Variația a doua; condiții suficiente de extrem

Cel de al treilea pas în rezolvarea problemelor variaționale este alegerea dintre punctele critice a acelor ce realizează efectiv un extrem. În situații concrete, provenite din geometrie, fizică, inginerie sau economie, realizarea extremelor este impusă de natura problemei. Teoretic vorbind, trebuie să găsim condiții suficiente de extrem. Pentru aceasta definim variația a doua a unei funcționale.

Să ne întoarcem la definiția diferențiabilității, definiția 1, și să presupunem că funcția f este derivabilă pe întreg domeniul său de definiție D . Atunci operatorul derivată $L(x, \cdot)$ devine o funcție între două spații normate

$$L(\cdot, \cdot) : D \subseteq \mathbf{U} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V}),$$

unde $\mathcal{L}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ este spațiul normat al operatorilor liniari și mărginiți de la \mathbf{U} la \mathbf{V} . Dacă această funcție este diferențiabilă într-un punct $x \in D$, derivata în x a funcției L se numește *derivata a doua a funcției f* în punctul x . Derivata a doua este un operator biliniar și continuu de la \mathbf{U} la \mathbf{V} sau, prin identificarea variațiilor, un operator pătratic.

Concret, în cazul funcționalelor de care ne-am ocupat anterior avem următoarele rezultate.

Definiția 2 Dacă variația $\delta J(x, h)$ este diferențiabilă ca funcție de x , variația ei $\delta(\delta J(x, h))(k)$ se numește *variația a doua a funcționalei J* și se notează $\delta^2 J(x; h, k)$.

Propoziție Dacă funcționala J este de două ori diferențiabilă, atunci

$$\delta^2 J(x; h, h) = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} J(x + \varepsilon h)|_{\varepsilon=0}.$$

Pe de altă parte să presupunem că abaterea de la aproximarea liniară, $r(x, h)$, mică în raport cu h , poate fi aproximată cu un operator pătratic, adică

$$r(x, h) = A(h, h) + r_1(x, h)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_1(x, h)}{\|h\|^2} = 0,$$

unde A este un operator biliniar simetric. Atunci are loc următoarea proprietate:

Formula Taylor de ordin doi Avem egalitatea $A(h, h) = \frac{1}{2} \delta^2 J(x; h, h)$ și în consecință

$$\Delta J(x(\cdot)) = J(x + h) - J(x) = \delta J(x, h) + \frac{1}{2} \delta^2 J(x; h, h) + r_1(x, h).$$

În continuare vom prescurta $\delta^2 J(x; h, h)$ prin $\delta^2 J(x, h)$

În cazul în care x este punct critic, extremală, $\delta J(x, h) = 0$, natura punctului critic este dată de funcționala pătratică $\delta^2 J(x, h)$. Ca și în cazul funcțiilor reale de variabile reale are loc următoarea

Teoremă a) Condiție necesară Dacă extremala x este un punct de minim al funcționalei J , atunci $\delta^2 J(x, h) \geq 0$ pentru orice h .

b) Condiție suficientă Dacă pentru extremala x este îndeplinită condiția

$$\delta^2 J(x, h) > C \|h\|^2 \quad (C > 0 \text{ fixat})$$

pentru orice h , atunci x este punct de minim pentru funcționala J .

Observație Condiția b) nu poate fi slăbită punând $\delta^2 J(x, h) > 0$. De exemplu, pentru funcționala

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 x^2(t)(t - x(t)) dt$$

pe spațiul $C[0, 1]$, funcția nulă $x(t) = 0, \forall t \in [0, 1]$, este punct critic și

$$\delta^2 J(x = 0, h) = \int_0^1 2t h^2(t) dt > 0$$

pentru orice variație h . Totuși J ia și valori negative în orice vecinătate a funcției nule: pentru $\varepsilon > 0$ și funcția $x_\varepsilon(t) = \varepsilon - t$ dacă $t < \varepsilon$ și nulă în rest,

$$J(x_\varepsilon(\cdot)) = \int_0^\varepsilon (\varepsilon - t)^2(-\varepsilon) dt < 0.$$

Două exemple de utilizare a variației de ordinul al doilea.

1 Pentru funcționala $J(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t)) dt$, variația a doua este

$$\delta^2 J(x, h) = \int_a^b \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(t, x(t)) h^2(t) dt.$$

Pe de altă parte, dezvoltând după puterile lui h , găsim în punctul critic x

$$\begin{aligned} \Delta J(x, h) &= \int_a^b \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(t, x(t)) h^2(t) + r_2(x, h) h^3(t) \right) dt = \\ &= \int_a^b h^2(t) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(t, x(t)) + r_2(x, h) h(t) \right) dt, \end{aligned}$$

unde $r_2(x, \cdot)$ este o funcție mărginită în jurul lui $h = 0$. Rezultă că *punctul critic x este punct de minim al funcționalei J , dacă și numai dacă*

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(t, x(t)) > 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

2 Pentru funcționala $J(x(\cdot)) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt$, variația a doua este

$$\delta^2 J(x, h) = \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x'} h h' + \frac{\partial^2 L}{\partial x'^2} h'^2 \right) dt.$$

Ținând cont că $2hh' = (h^2)'$ și integrând al doilea termen prin părți, variația a doua devine

$$\delta^2 J(x, h) = \int_a^b \left(F(t) h^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L}{\partial x'^2} h'^2 \right) dt, \quad (15)$$

unde am notat $F(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial x'} \right) \right)$.

Condiția necesară Legendre Dacă funcția extremală x este punct de minim pentru J , atunci

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x'^2}(t, x(t), x'(t)) \geq 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Demonstrație Folosim același procedeu ca în cazul lemei fundamentale.

Presupunem că într-un punct $t_0 \in [a, b]$ avem $\frac{\partial^2 L}{\partial x'^2}(t_0, x(t_0), x'(t_0)) < 0$. Atunci aceeași inegalitate va avea loc și pe o vecinătate U a punctului t_0 . Construim o variație $h(t_0 + \tau)$, de clasă C^1 , care să aibă valori cuprinse între 0 și 1, să se anuleze în afara vecinătății U și $h(t_0) = 1$. În plus vom cere ca derivata funcției h să fie suficient de mare în modul pe anumite intervale. De exemplu, dacă $U = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, putem lua $h(t_0 + \tau) = \frac{1}{\varepsilon^4} (m\tau + \varepsilon)^2 (\varepsilon - m\tau)^2$, dacă $|\tau| < \frac{\varepsilon}{m}$ și 0 în rest. Un calcul direct ne dă

$$\int_{|\tau| < \frac{\varepsilon}{m}} h(t_0 + \tau) d\tau = \frac{256}{105} \frac{m}{\varepsilon}.$$

Dacă $\frac{\partial^2 L}{\partial x'^2}(t, x(t), x'(t)) \leq -C < 0$, în U , avem

$$\delta^2 J(x, h) \leq \int_a^b |F(t)| dt - \frac{256}{105} \frac{m}{\varepsilon} C$$

și atunci putem alege m astfel încât $\delta^2 J(x, h) < 0$, ceea ce contrazice condiția necesară de minim.

Condiția lui Legendre se extinde la funcții de mai multe variabile. Astfel, dacă funcția extremală w este punct de minim pentru funcționala

$$J(w(\cdot)) = \iint_{\Omega} L(x, y, w(x, y), w_x(x, y), w_y(x, y)) dx dy,$$

atunci forma pătratică

$$Q(h) = w_{xx}(x, y) (h^1)^2 + 2w_{xy}(x, y) h^1 h^2 + w_{yy}(x, y) (h^2)^2$$

este pozitiv semidefinită în orice punct din Ω (notația $w_{..}$ reprezintă derivate de ordinul al doilea).

Condiții suficiente de extrem specifice și comode sunt greu de obținut; unele, mai mult sau mai puțin clasice, vor fi date în capitolele următoare.

Bibliografie

- [1] C. Fox, *An Introduction to the Calculus of Variations*, Dover Publications, Inc., New York, 1963.
- [2] M. L. Krasnov, G.I. Makarenko, A. I. Kiselev, *Problems and Exercises in the Calculus of Variations*, Mir Publisheres, Moscow, 1975.
- [3] E. Langemann, *Introduction to Variational Calculus*, INTERNET, 2008.
- [4] I. B. Russak, *Calculus of Variations*, MA4311, Lectures Notes, Department of Mathematics, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 93943, July, 2002.
- [5] G. E. Șilov, *Analiză Matematică (curs special)*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1989.
- [6] C. Udriște, *Geometric Dynamics*, Mathematics and Its Applications, 513, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.
- [7] C. Udriște, L. Matei, *Lagrange-Hamilton Theories* (in Romanian), Monographs and Textbooks 8, Geometry Balkan Press, Bucharest, 2008.
- [8] E. T. Whittaker, *A Treatise on The Analytical Dynamics of Particles & Rigid Bodies*, Cambridge University Press, 1989.

Motto: "Zice unul: - Dragul meu,
Așa cui faceam și eu,
Poate chiar mai dichisit,
Însa, vezi, nu m-am gândit."

Arghezi - Cuiul

CAPITOLUL 2

PRINCIPII VARIAȚIONALE

In acest Capitol vom studia probleme variaționale adaptate, împreună cu condiții la frontieră, condiții subsidiare sau restricții impuse asupra clasei soluțiilor admisibile care produc valori extreme pentru o funcțională dată. Vom insista și asupra condițiilor suficiente (testul Legendre-Jacobi, testul de înveritate) pentru existența minimului sau maximului unei funcționale.

1 Probleme cu condiții naturale la frontieră

Problema 1 Fie $L(x, y, y')$ un Lagrangian de clasă C^2 . Să se găsească funcția $x \rightarrow y(x)$ de clasă C^2 pentru care funcționala

$$I(y(\cdot)) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y(x), y'(x)) dx$$

are valoare extremă, când una sau ambele condiții $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ la frontieră nu sunt prescrise.

Soluție Presupunem că funcția $y = y(x)$ produce o valoare extremă și construim o variație $y_\varepsilon(x) = y(x) + \varepsilon h(x)$ de clasă C^2 . Substituim în funcționala și obținem funcția (integrală cu un parametru)

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y(x) + \varepsilon h(x), y'(x) + \varepsilon h'(x)) dx.$$

Prin ipoteză $\varepsilon = 0$ este o valoare extremă a lui $I(\varepsilon)$. Deci, aplicând derivarea sub semnul integral, găsim

$$0 = I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} h + \frac{\partial L}{\partial y'} h' \right) dx.$$

Integrând prin părți al doilea termen de sub integrală, deducem

$$0 = I'(0) = \frac{\partial L}{\partial y'} h \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \right) h dx. \quad (1)$$

Presupunem că $y = y(x)$ este soluția ecuației Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0$$

(ecuație diferențială de cel mult ordinul al doilea) pe intervalul $[x_1, x_2]$. Pentru ca relația (1) să fie satisfăcută este necesar ca

$$\frac{\partial L}{\partial y'} h \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{\partial L}{\partial y'}(x_2)h(x_2) - \frac{\partial L}{\partial y'}(x_1)h(x_1) = 0.$$

În cazul punctelor fixate $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, ecuația Euler-Lagrange împreună cu $h(x_1) = h(x_2) = 0$ garantează relația (1). În cazul în care ambele capete sunt variabile, valorile $h(x_1)$, $h(x_2)$ sunt arbitrare și ca relația (1) să fie adevărată trebuie să impunem ecuația Euler-Lagrange împreună cu condițiile

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(x_1) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y'}(x_2) = 0. \quad (2)$$

Aceste condiții se numesc *condiții naturale la frontieră* sau *condiții de transversabilitate* pentru problema de extrem. Apar natural următoarele cazuri:

(i) **puncte terminale fixate** Dacă capetele graficului $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$ sunt fixate, atunci nu există nici o variație în aceste capete, adică $h(x_1) = h(x_2) = 0$;

(ii) **condiții la frontieră mixte** Dacă $y(x_1) = y_1$ este fixat și $y(x_2) = y_2$ este arbitrar, atunci trebuie să impunem $h(x_1) = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y'}(x_2) = 0$;

(iii) **condiții la frontieră mixte** Dacă $y(x_1) = y_1$ este arbitrar și $y(x_2) = y_2$ este fixat, atunci trebuie să impunem $\frac{\partial L}{\partial y'}(x_1) = 0$, $h(x_2) = 0$;

(iv) **capete variabile** Dacă punctele $y(x_1) = y_1$ și $y(x_2) = y_2$ sunt arbitrare, atunci trebuie să impunem condițiile (2);

Condițiile la frontieră în care variația h se anulează se numesc *condiții la frontieră esențiale*, sau *condiții la frontieră de tip Dirichlet*, sau *condiții la frontieră geometrice*. Condițiile naturale la frontieră se mai numesc și *condiții la frontieră de tip Neumann*, sau *condiții la frontieră dinamice*. Evident că putem avea condiții mixte la frontieră. Terminologia de aici se extinde și la probleme multidimensionale.

Problema 2 Fie $L(x, y, y', y'')$ un Lagrangian de clasă C^3 . Să se găsească funcția $x \rightarrow y(x)$ de clasă C^4 pentru care funcționala

$$I(y(\cdot)) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y(x), y'(x), y''(x)) dx$$

are valoare extremă.

Solutie Fie $\delta y = y_1 - y = h$ variația în y . Dacă y este soluția problemei, atunci prima variație a funcționalei noastre este

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial L}{\partial y''} \delta y'' \right) dx = 0.$$

Utilizăm integrarea prin părți. Pentru al doilea termen de sub integrală punem

$$u = \frac{\partial L}{\partial y'}, \quad du = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) dx, \quad dv = \delta y' dx, \quad v = \delta y.$$

Obținem

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \delta y - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \delta y' \right) dx + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{\partial L}{\partial y''} \delta y' \Big|_{x_1}^{x_2} = 0.$$

Din nou integrăm prin părți referitor la al treilea termen de sub integrală. Găsim

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right) \delta y dx \\ &+ \left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right) \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{\partial L}{\partial y''} \delta y' \Big|_{x_1}^{x_2} = 0. \end{aligned}$$

Ecuția Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial L}{\partial y''} = 0$$

este o ecuație diferențială de cel mult ordinul patru. Condițiile la frontieră sunt

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right) \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y''} \delta y' \Big|_{x_1}^{x_2} = 0.$$

Dacă $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$, $y'(x_1) = y_1^1$, $y'(x_2) = y_2^1$ sunt fixate, atunci δy și $\delta y'$ se anulează în x_1 și în x_2 . Alternativ, putem avea condițiile la frontieră naturale

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right) \Big|_{x_1}^{x_2} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y''} \Big|_{x_1}^{x_2} = 0.$$

Evident, combinațiile conduc la condiții la frontieră mixte.

Exemplu Să se găsească funcția $x \rightarrow y(x)$ de clasă C^4 pentru care funcționala

$$I(y(\cdot)) = \int_{x_1}^{x_2} \left(a(x)(y'')^2(x) - b(x)(y')^2(x) + c(x)y^2(x) \right) dx$$

are valoare extremă.

Soluție Lagrangianul $L = a(x)(y'')^2 - b(x)(y')^2 + c(x)y^2$ are derivatele parțiale

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2c(x)y, \quad \frac{\partial L}{\partial y'} = -2b(x)y', \quad \frac{\partial L}{\partial y''} = 2a(x)y''.$$

Rezulta ecuația Euler-lagrange (de ordinul al patrulea)

$$c(x)y + \frac{d}{dx}(b(x)y') + \frac{d^2}{dx^2}(b(x)y'') = 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2.$$

La aceasta se adauga condițiile la frontieră:

(i) dacă δy și $\delta y'$ se anulează la capete, atunci $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2, y'(x_1) = y_1', y'(x_2) = y_2'$ trebuiesc prescrise;

(ii) dacă δy se anulează la capete, iar $\delta y'$ nu se anulează la capete, atunci $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$ trebuiesc prescrise și condițiile naturale $\frac{\partial L}{\partial y''}(x_1) = 0, \frac{\partial L}{\partial y''}(x_2) = 0$ trebuie să fie verificate; în acest caz $y''(x_1)$ și $y''(x_2)$ au valori fixate;

(iii) dacă δy nu se anulează la capete, iar $\delta y'$ se anulează la capete, atunci $y'(x_1) = y_1', y'(x_2) = y_2'$ trebuiesc prescrise și condițiile naturale

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right) (x_1) = 0, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right) (x_2) = 0$$

trebuie să fie satisfăcute;

(iv) dacă variațiile δy și $\delta y'$ nu se anulează la capete, atunci condițiile naturale la frontieră sunt

$$\frac{\partial L}{\partial y''}(x_1) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y''}(x_2) = 0$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right) (x_1) = 0, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) \right) (x_2) = 0.$$

Problema 4 Fie $L(x, y, w, w_x, w_y)$ un Lagrangian de clasă C^2 . Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cu frontiera simplă închisă $\partial\Omega$ de clasă C^1 pe porțiuni. Să se găsească funcția $(x, y) \rightarrow w(x, y)$ de clasă C^2 pentru care funcționala

$$I(w(\cdot)) = \int_{\Omega} L(x, y, w(x, y), w_x(x, y), w_y(x, y)) dx dy$$

are valoare extremă.

Soluție Utilizăm notațiile variaționale. Impunem ca prima variație să fie zero,

$$\delta I = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial w} \delta w + \frac{\partial L}{\partial w_x} \delta w_x + \frac{\partial L}{\partial w_y} \delta w_y \right) dx dy = 0.$$

Pentru $N = \frac{\partial L}{\partial w_x} \delta w$ si $M = -\frac{\partial L}{\partial w_y} \delta w$, aplicăm teorema Green în plan,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial\Omega} M dx + N dy.$$

Deoarece

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial w_x} \delta w_x + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial w_x} \right) \delta w, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial L}{\partial w_y} \delta w_y - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial w_y} \right) \delta w,$$

găsim

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial L}{\partial w} - D_x \frac{\partial L}{\partial w_x} - D_y \frac{\partial L}{\partial w_y} \right) \delta w dx dy \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left(-\frac{\partial L}{\partial w_y} dx + \frac{\partial L}{\partial w_x} dy \right) \delta w = 0. \end{aligned}$$

In acest mod funcția $w(x, y)$ este o soluție a EDP Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial w} - D_x \frac{\partial L}{\partial w_x} - D_y \frac{\partial L}{\partial w_y} = 0$$

(cel mult de ordinul al doilea) la care adăugăm condiții la frontieră. Dacă $\delta w = 0$, atunci funcția $w(x, y)$ trebuie specificată pe $\partial\Omega$, adica $w(x, y)|_{\partial\Omega} = \text{dat}$ (probleme Dirichlet). Dacă $\delta w \neq 0$, atunci impunem condiția naturală la frontieră (probleme Newmann)

$$-\frac{\partial L}{\partial w_y} dx + \frac{\partial L}{\partial w_x} dy \Big|_{(x,y) \in \partial\Omega} = 0.$$

Ultima condiție poate fi scrisă utilizând vectorul normal unitar la frontieră $\partial\Omega : \vec{\gamma} = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$. In acest caz $\frac{d\vec{\gamma}}{ds} = \vec{t} = \frac{dx}{ds}\vec{i} + \frac{dy}{ds}\vec{j}$ este versorul tangent și $\vec{n} = \frac{dy}{ds}\vec{i} - \frac{dx}{ds}\vec{j}$ este vectorul normal unitar. Cu acestea condiția naturală la frontieră se scrie

$$\vec{n} \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial w_x} \vec{i} + \frac{\partial L}{\partial w_y} \vec{j} \right) \Big|_{(x,y) \in \partial\Omega} = 0.$$

2 Suficiența prin testul Legendre-Jacobi

Tradițional, drept condiție suficientă pentru existența extremumului unei funcționale se consideră a fi testul lui Legendre-Jacobi. Noi adăugăm in continuare, testul de invexitate, care a apărut în literatura mai nouă.

Fie $L(x, y, y')$ un Lagrangian de clasă C^2 asociat funcției $x \rightarrow y(x)$ de clasă C^2 . Considerăm din nou funcționala

$$I(y(\cdot)) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y(x), y'(x)) dx$$

și presupunem că $y = y(x)$ este un punct de extrem ce satisface condițiile $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. Fie $y_\varepsilon(x) = y(x) + \varepsilon h(x)$ o variație de clasă C^2 ce satisface condițiile $h(x_1) = h(x_2) = 0$. Atunci funcționala I se înlocuiește cu integrala $I(\varepsilon)$. Pe aceasta o dezvoltăm în serie Taylor după puterile lui ε (în jurul punctului $\varepsilon = 0$). Găsim

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y_\varepsilon(x), y'_\varepsilon(x)) dx = I(0) + I'(0)\varepsilon + I''(0)\frac{\varepsilon^2}{2} + \dots$$

Pe de altă parte, primele două derivate sunt

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} h + \frac{\partial L}{\partial y'} h' \right) dx$$

$$I''(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} h h' + \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} h'^2 \right) dx.$$

Ne ocupăm de variația de ordinul întâi. Integrând prin părți, ea se scrie

$$I'(0) = \frac{\partial L}{\partial y'} h \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right) h dx.$$

Deoarece h este o variație arbitrară cu $h(x_1) = h(x_2) = 0$, din $I'(0) = 0$ găsim condițiile necesare

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0, \quad y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2.$$

Dacă este așa, semnul diferenței $I(\varepsilon) - I(0)$ este dat de $I''(0)$. Dacă $I''(0) > 0$, pe arcul extremal, atunci $I(0)$ este un minim; dacă $I''(0) < 0$, pe arcul extremal, atunci $I(0)$ este un maxim; dacă $I''(0)$ își schimbă semnul pe arcul extremal, atunci $I(0)$ nu este un extrem; dacă $I''(0) = 0$ pe arcul extremal, atunci putem face apel la derivate de ordin superior.

Să analizăm variația a doua $I''(0)$ știind că $h(x_1) = h(x_2) = 0$ și $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0$, $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$. Dacă $y(x)$ este soluție a ecuației Euler-Lagrange și dacă $I(y)$ este valoare minima, atunci $I''(0) \geq 0$; dacă $y(x)$ este soluție a ecuației Euler-Lagrange și dacă $I(y)$ este valoare maximă, atunci $I''(0) \leq 0$.

A doua variație $I''(0)$ se poate transcrie sub diferite forme.

În primul rând, integrând prin părți termenul din mijloc, găsim

$$I''(0) = h^2 \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(h^2 \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} \right) + \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} h'^2 \right) dx.$$

Dacă luăm $h(x_1) = h(x_2) = 0$, atunci

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - \frac{d}{dx} \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} > 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} > 0$$

sunt condiții necesare și suficiente de minim.

În al doilea rând, scriem

$$I''(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left((L_{yy} h^2 + L_{yy'} h h') + h' (L_{yy'} h + L_{y'y'} h') \right) dx.$$

Integrăm termenul al doilea prin părți,

$$I''(0) = \left(h^2 L_{yy'} + h h' L_{y'y'} \right)_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(h^2 L_{yy} - h^2 \frac{d}{dx} L_{yy'} - h \frac{d}{dx} (h' L_{y'y'}) \right) dx.$$

Primul termen este nul prin ipoteze. Al doilea termen poate fi scris în forma $I''(0) = - \int_{x_1}^{x_2} h A(h) dx$, unde

$$A(h) = \frac{d}{dx} (L_{y'y'} h') - \left(L_{yy} - \frac{d}{dx} L_{yy'} \right) h.$$

Operatorul diferențial A are forma

$$A(u) = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u,$$

unde $p(x) = L_{y'y'}$ și $q(x) = L_{yy} - \frac{d}{dx} L_{yy'}$. Ecuația diferențială

$$A(u) = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) - q(x)u = 0, \quad x \in [x_1, x_2]$$

se numește *ecuație diferențială Jacobi*. Operatorul diferențial $A(\cdot)$ este un *operator Sturm-Liouville* autoadjunct în sensul

$$uA(h) - hA(u) = \frac{d}{dx} (p(x)(uh' - hu'))$$

(*identitatea lui Lagrange*).

Revenim la variația a doua, pe care o scriem sub forma

$$I''(0) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{h}{u} u A(h) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{h}{u} \left(h A(u) + \frac{d}{dx} (p(x)(uh' - hu')) \right) dx.$$

In ultima integrală, integram prin părți,

$$U = \frac{h}{u}, \quad dV = \frac{d}{dx} (p(x)(uh' - hu')) dx$$

$$dU = \frac{uh' - hu'}{u^2} dx, \quad V = p(x)(uh' - hu').$$

Punând $p = L_{y'y'}$, deducem

$$I''(0) = \frac{h}{u} L_{y'y'}(uh' - hu') \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{h^2}{u} A(u) dx + \int_{x_1}^{x_2} L_{y'y'} \left(h' - h \frac{u'}{u} \right)^2 dx.$$

Adăugăm condițiile: (i) presupunem $h(x_1) = 0$, $h(x_2) = 0$ (dispare primul termen); (ii) presupunem ca u este soluția ecuației Jacobi $A(u) = 0$, $x \in [x_1, x_2]$, $u(x_1) = 0$, $u'(x_1) \neq 0$ (dispare al doilea termen); (iii) presupunem $h' - h \frac{u'}{u} \neq 0$ (semnul celui de al treilea termen este dat de semnul lui $L_{y'y'}$). Concluzii (condițiile suficiente ale lui Legendre-Jacobi): (1) dacă $L_{y'y'} < 0$, $x \in [x_1, x_2]$, atunci valoarea $I(y)$ este maximă; (2) dacă $L_{y'y'} > 0$, $x \in [x_1, x_2]$, atunci valoarea $I(y)$ este minimă.

3 Dinamică Lagrangiană unitemporală

Se consideră funcționala următoare

$$I(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

unde $x = (x^1, \dots, x^n) = (x^i(t))$, $i = \overline{1, n}$ este o colecție de n funcții (sau echivalent, o funcție cu valori în R^n , adică $x : [t_0, t_1] \rightarrow R^n$) și $L = L(x, \dot{x}, t)$ o funcție de clasă C^2 de $2n+1$ variabile x, \dot{x}, t . Dorim să extremizăm funcționala $I(x(\cdot))$ cu condițiile la capete $x(t_0) = x_0$ și $x(t_1) = x_1$.

Teoremă. *O funcție $x(\cdot)$ de clasă C^2 care extremizează funcționala I satisface în mod necesar ecuațiile diferențiale Euler-Lagrange*

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0$$

și condițiile la capete $x(t_0) = x_0$ și $x(t_1) = x_1$.

Aici avem un sistem de n EDO, de regulă de ordinul doi, cu n funcții necunoscute $x^i(\cdot)$. Teorema arată că dacă sistemul Euler-Lagrange are soluții, atunci minimizantul (maximizantul) funcționalei I (presupunând că există) va fi printre soluții. Soluțiile sistemului Euler-Lagrange sunt numite *extremale* sau *puncte critice* ale Lagrangianului L .

Demonstrație Considerăm că $x(t)$ este o soluție a problemei precedente. Construim o altă funcție în jurul lui $x(t)$ de forma $x(t) + \varepsilon h(t)$, astfel încât $h(t_0) = 0, h(t_1) = 0$. Aici ε este un parametru "mic", iar h este o variație "mică". Funcționala devine o funcție de ε , adică o integrală cu un parametru

$$I(\varepsilon) = \int_{x_0}^{x_1} L(x(t) + \varepsilon h(t), \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t) dt.$$

Se impune condiția necesară de extrem,

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} I(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = (\dots) = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^j} h^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} \dot{h}^j \right) (t) dt \\ &= BT + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x^j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} \right) h^j dt, \end{aligned}$$

unde

$$BT = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} h^j(t) \right|_{t=t_0}^{t=t_1}$$

sunt termeni pe frontieră, obținuți prin integrare parțială. Dacă funcția $x(t)$ este fixată la capete, atunci termenii BT dispar, deoarece $h(t_0) = 0, h(t_1) = 0$. Luând funcția vectorială h arbitrară, găsim sistemul de ecuații diferențiale din teoremă.

Dinamica descrisă de EDO Euler-Lagrange de ordinul al doilea se numește *dinamică Euler-Lagrange unitemporală*.

3.1 Testul de invexitate

Să formulăm o condiție suficientă ne-standard pentru existența minimului funcționalei

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt,$$

unde $t \in [t_1, t_2]$, L este un Lagrangian de clasă C^2 , iar $x : [t_1, t_2] \rightarrow R^n$ este o funcție de clasă C^2 .

O funcție $x^*(t)$ se numește *punct critic al funcționalei J* dacă este soluția sistemului Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0,$$

la care se adaugă condițiile la capete.

Definiție Fie $x, x^* : [t_1, t_2] \rightarrow R^n$ funcții de clasă C^2 . Dacă există o funcție vectorială $\eta(t, x, x^*, \dot{x}, \dot{x}^*) \in R^n$ cu $\eta = 0$ pentru $x(t) = x^*(t)$, astfel încât

$$J(x(\cdot)) - J(x^*(\cdot)) \geq \int_{t_1}^{t_2} \left(\eta^i \frac{\partial L}{\partial x^{*i}} + \frac{d\eta^i}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{*i}} \right) dt,$$

pentru orice funcție $x(\cdot)$, atunci J se numește *invexă* în punctul $x^*(\cdot)$ pe intervalul $[t_1, t_2]$ în raport cu funcția vectorială η .

Funcționala J se numește *invexă* dacă este *invexă* în orice punct $x^*(\cdot)$.

Teoremă Funcționala J este *invexă* dacă și numai dacă fiecare punct critic este un punct de minim global.

Demonstrație Presupunem ca funcționala J este *invexă*. Atunci, dacă $x^*(t)$ este soluție a sistemului Euler-Lagrange, avem

$$J(x(\cdot)) - J(x^*(\cdot)) \geq \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x^{*i}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{*i}} \right) \eta^i dt + \eta^i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{*i}} \Big|_{t_1}^{t_2} = 0,$$

Rezultă că un punct critic este un punct de minim global.

Reciproc, presupunem ca fiecare punct critic este punct de minim global. Dacă $x^*(t)$ este un punct critic, atunci punem $\eta = 0$. Dacă $x^*(t)$ nu este un punct critic, atunci

$$\frac{\partial L}{\partial x^{*i}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{*i}} \neq 0$$

pentru cel puțin un indice i . Câmpul vectorial nenul

$$\xi^i = \frac{\partial L}{\partial x^{*i}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{*i}}$$

ne permite sa definim câmpul vectorial

$$\eta^k = \frac{L(t, x, \dot{x}) - L(t, x^*, \dot{x}^*)}{\delta_{ij} \xi^i \xi^j} \xi^k.$$

Ambele câmpuri η satisfac relația din definiția *invexității*.

4 Dinamică Lagrangiană multitemporală

În mod uzual *coordonatele spațiale* și *timpul* joacă roluri distincte: o coordonată spațială este deseori un indice asociat unui grad de libertate, iar coordonata timp este timpul fizic în care evoluează sistemele fizice. Această teorie este satisfăcătoare până ne îndreptăm atenția spre ecuații relativistic invariante (câmpuri chirale, sine-Gordon, etc). În plus, în unele probleme fizice

utilizăm un 2-timp $t = (t^1, t^2)$, unde t^1 înseamnă timpul intrinsec și t^2 este timpul observatorului. De asemenea, există o mulțime de probleme unde nu avem nici un motiv să preferăm o coordonată alta. Iată de ce ne referim la funcții care depind de mai multe variabile timp și care modelează *evoluțiile geometrice multidimensionale*. În acest sens, prin multi-timp înțelegem un parametru vectorial de evoluție.

Fie x^i , $i = 1, \dots, n$, variabilele de câmp din spațiul țintă R^n , fie t^α , $\alpha = 1, \dots, m$, variabilele multi-timp din spațiul sursă R^m și fie $x_\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha}$ vitezele parțiale. Acestea determină fibratul jeturilor de ordinul unu

$$J^1(R^m, R^n) = \{(x^i, x_\alpha^i, t^\alpha)\} \equiv R^{n+nm+m}.$$

4.1 Cazul funcționalelor integrale multiple

Presupunem că dăm un *Lagrangian* neted $L(t, x(t), x_\gamma(t))$, $t \in R_+^m$. Fixăm multi-timpii $t_0, t_1 \in R_+^m$ și două puncte $x_0, x_1 \in R^n$. Paralelipipedul $\Omega_{t_0, t_1} \subset R_+^m$, fixat prin punctele diagonal opuse $t_0 = (t_0^1, \dots, t_0^m)$ și $t_1 = (t_1^1, \dots, t_1^m)$, este echivalent cu intervalul închis $t_0 \leq t \leq t_1$, în raport cu *ordinea parțială produs* pe R_+^m . Problema clasică a calculului variațional cere să găsim o m -foaie $x^*(\cdot) : \Omega_{t_0, t_1} \rightarrow R^n$ de clasă C^2 care minimizează *funcționala integrală multiplă*

$$I(x(\cdot)) = \int_{\Omega_{t_0, t_1}} L(t, x(t), x_\gamma(t)) dt^1 \dots dt^m,$$

dintre toate funcțiile $x(\cdot)$ care satisfac condițiile la frontieră $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ sau $x(t)|_{\partial\Omega_{t_0, t_1}} = \text{dat}$, utilizând funcții variații constrânse prin condiții la frontieră. Condițiile necesare sunt conținute în următoarea

Teoremă (EDP Euler-Lagrange multi-timp) *Fie D_γ operatorul de derivare totală în raport cu $t = (t^\gamma)$. Dacă m -foaia $x^*(\cdot)$ minimizează funcționala $I(x(\cdot))$ în sensul precedent, atunci $x^*(\cdot)$ este soluție a EDP Euler-Lagrange multi-temporală*

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - D_\gamma \frac{\partial L}{\partial x_\gamma^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \gamma = 1, \dots, m, \quad (E - L)_1$$

care satisface condițiile la frontieră.

Aici avem un sistem de n EDP, de regulă de ordinul doi, cu n funcții necunoscute $x^i(\cdot)$. Teorema arată că dacă sistemul $(E - L)_1$ are soluții, atunci minimizantul funcționalei I (presupunând că există) va fi printre soluții. Soluțiile sistemului $(E - L)_1$ sunt numite *extremale* sau *puncte critice* ale Lagrangianului L .

Demonstrație Considerăm că $x(t)$ este o soluție a problemei precedente. Construim o altă funcție în jurul lui $x(t)$ de forma $x(t) + \varepsilon h(t)$, cu $h|_{\partial\Omega_{t_0, t_1}} = 0$. Aici ε este un parametru "mic", iar h este o variație "mică". Funcționala devine o funcție de ε , adică o integrală cu un parametru,

$$I(\varepsilon) = \int_{\Omega_{t_0, t_1}} L(t, x(t) + \varepsilon h(t), x_\gamma(t) + \varepsilon h_\gamma(t)) dt^1 \dots dt^m.$$

Se impune condiția necesară de extrem,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} I(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = (\dots) = \int_{\Omega_{t_0, t_1}} \left(\frac{\partial L}{\partial x^j} h^j + \frac{\partial L}{\partial x_\gamma^j} h_\gamma^j \right) (t) dt^1 \dots dt^m \\ &= BT + \int_{\Omega_{t_0, t_1}} \left(\frac{\partial L}{\partial x^j} - D_\gamma \frac{\partial L}{\partial x_\gamma^j} \right) h^j dt^1 \dots dt^m, \end{aligned}$$

unde D_γ este operatorul de derivare totală, care acționează după regula

$$D_\gamma \left(\frac{\partial L}{\partial x_\gamma^j} h^j \right) = h^j D_\gamma \left(\frac{\partial L}{\partial x_\gamma^j} \right) + \frac{\partial L}{\partial x_\gamma^j} D_\gamma h^j,$$

unde după γ , respectiv j , se face sumare. Termenii

$$BT = \int_{\Omega_{t_0, t_1}} D_\gamma \left(\frac{\partial L}{\partial x_\gamma^j} h^j \right) dt^1 \dots dt^m = \int_{\partial\Omega_{t_0, t_1}} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial L}{\partial x_\alpha^j} h^j n^\beta(t) d\sigma$$

conțin date pe frontieră, obținute prin formula divergenței, utilizând vectorul unitar $n^\beta(t)$ normal la frontiera $\partial\Omega_{t_0, t_1}$. Termenii BT dispar, deoarece $h|_{\partial\Omega_{t_0, t_1}} = 0$. Luând funcția vectorială h arbitrară, găsim sistemul de ecuații din teoremă.

Dinamica descrisă de EDP Euler-Lagrange de ordinul al doilea se numește *dinamică Euler-Lagrange multitemporală*.

4.2 Testul de invexitate

Să formulăm o condiție suficientă modernă pentru existența minimului funcționalei

$$I(x(\cdot)) = \int_{\Omega_{t_0, t_1}} L(t, x(t), x_\gamma(t)) dt^1 \dots dt^m,$$

unde $t \in \Omega_{t_0, t_1}$, L este un Lagrangian de clasă C^2 , iar $x : \Omega_{t_0, t_1} \rightarrow R^n$ este o funcție de clasă C^2 .

O funcție $x^*(t)$ se numește *punct critic al funcționalei J* dacă este soluția sistemului Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - D_\gamma \frac{\partial L}{\partial x_\gamma^i} = 0,$$

la care se adaugă condiția la frontieră.

Definiție Fie $x, x^* : \Omega_{t_0, t_1} \rightarrow R^n$ două funcții de clasă C^2 . Dacă există o funcție vectorială $\eta(t, x, x^*, \dot{x}, \dot{x}^*) \in R^n$ cu $\eta = 0$ pentru $x(t) = x^*(t)$, astfel încât

$$I(x(\cdot)) - I(x^*(\cdot)) \geq \int_{\Omega_{t_0, t_1}} \left(\eta^i \frac{\partial L}{\partial x^{*i}} + (D_\alpha \eta^i) \frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{*i}} \right) dt^1 \dots dt^m,$$

atunci funcționala I se numește *invexă în punctul $x^*(t)$ pe intervalul $[t_1, t_2]$ în raport cu funcția vectorială η* .

Teoremă Funcționala J este *invexă* dacă și numai dacă fiecare punct critic este un punct de minim global.

Demonstrație Presupunem că funcționala J este invexă, adică

$$I(x(\cdot)) - I(x^*(\cdot)) \geq \int_{\Omega_{t_0, t_1}} \left(\frac{\partial L}{\partial x^{*i}} - D_\alpha \frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{*i}} \right) \eta^i dt + \int_{\partial \Omega_{t_0, t_1}} \eta^i \frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{*i}} n^\alpha d\sigma = 0.$$

Rezultă că un punct critic (soluția sistemului Euler-Lagrange) $x^*(t)$ este un punct de minim global.

Reciproc, presupunem ca fiecare punct critic este punct de minim global. Dacă $x^*(t)$ este un punct critic, atunci punem $\eta = 0$. Dacă $x^*(t)$ nu este un punct critic, adică

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - D_\alpha \frac{\partial L}{\partial x_\alpha^i} \neq 0,$$

atunci el nu poate fi punct de extrem. Câmpul vectorial

$$\xi^i = \frac{\partial L}{\partial x^i} - D_\alpha \frac{\partial L}{\partial x_\alpha^i}$$

ne permite să definim câmpul vectorial

$$\eta^k = \frac{L(t, x, \dot{x}) - L(t, x^*, \dot{x}^*)}{2\delta_{ij}\xi^i\xi^j} \xi^k.$$

Ambele câmpuri η satisfac relația din definiția invexității.

4.3 Cazul funcționalelor integrale curbilinii independente de drum

Un *Lagrangian* neted $L(t, x(t), x_\gamma(t))$, $t \in R_+^m$ produce două 1-forme netede închise (complet integrabile):

- diferențiala

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t^\gamma} dt^\gamma + \frac{\partial L}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial L}{\partial x_\gamma^i} dx_\gamma^i$$

de componente $(\frac{\partial L}{\partial t^\gamma}, \frac{\partial L}{\partial x^i}, \frac{\partial L}{\partial x_\gamma^i})$, în raport cu baza $(dt^\gamma, dx^i, dx_\gamma^i)$;

- restricția lui dL la $(t, x(t), x_\gamma(t))$, adică pullback-ul

$$dL|_{(t, x(t), x_\gamma(t))} = \left(\frac{\partial L}{\partial t^\beta} + \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t^\beta} + \frac{\partial L}{\partial x_\gamma^i} \frac{\partial x_\gamma^i}{\partial t^\beta} \right) dt^\beta,$$

de componente (ce conțin și accelerații parțiale)

$$D_\beta L = \frac{\partial L}{\partial x^i}(x(t), x_\gamma(t), t) \frac{\partial x^i}{\partial t^\beta}(t) + \frac{\partial L}{\partial x_\gamma^i}(x(t), x_\gamma(t), t) \frac{\partial x_\gamma^i}{\partial t^\beta}(t) + \frac{\partial L}{\partial t^\beta}(x(t), x_\gamma(t), t),$$

în raport cu baza dt^β .

Fie $L_\beta(t, x(t), x_\gamma(t))dt^\beta$ o 1-formă Lagrange închisă (complet integrabilă), adică, $D_\beta L_\alpha = D_\alpha L_\beta$ sau explicit

$$\frac{\partial L_\beta}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial L_\beta}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial L_\beta}{\partial x_\gamma^i} \frac{\partial x_\gamma^i}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial L_\alpha}{\partial t^\beta} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t^\beta} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial x_\gamma^i} \frac{\partial x_\gamma^i}{\partial t^\beta}.$$

Dacă există un Lagrangian $L(x(t), x_\gamma(t), t)$ cu proprietatea $D_\beta L = L_\beta$ (pullback-ul precedent este 1-forma închisă dată), atunci funcția $x(t)$ este soluție a sistemului complet integrabil de EDP (de ordinul al doilea)

$$\frac{\partial L}{\partial t^\beta} + \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t^\beta} + \frac{\partial L}{\partial x_\gamma^i} \frac{\partial x_\gamma^i}{\partial t^\beta} = L_\beta.$$

Fie Γ_{t_0, t_1} o curbă arbitrară de clasă C^1 pe porțiuni care unește punctele t_0 și t_1 . Introducem o nouă problemă de calcul variațional cerând să găsim o m -foaie $x^*(\cdot) : \Omega_{t_0, t_1} \rightarrow R^n$ de clasă C^2 care să minimizeze *funcționala integrală curbilinie independentă de drum (acțiune)*

$$J(x(\cdot)) = \int_{\Gamma_{t_0, t_1}} L_\beta(t, x(t), x_\gamma(t)) dt^\beta, \quad \beta = 1, \dots, m,$$

dintre toate funcțiile $x(\cdot)$ care satisfac condițiile la frontieră $x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1$ sau $x(t)|_{\partial\Omega_{t_0, t_1}} = \text{dat}$, utilizând funcții variații constrânse prin condiții la frontieră și prin condiții de închidere (complet integrabilitate) ale 1-formei Lagrange.

Problemă fundamentală: cum putem caracteriza funcția $x^*(\cdot)$ care rezolvă problema variațională asociată funcționalei J ?

Teoremă Presupunem ca exista un Lagrangian $L(t, x(t), x_\gamma(t))$ cu proprietatea $D_\beta L = L_\beta$.

1) Dacă m -foaia $x^*(\cdot)$ este o extremală a lui L , atunci ea este de asemenea o extremală a diferențialei dL .

2) Dacă m -foaia $x^*(\cdot)$ minimizează funcționala $J(x(\cdot))$, atunci $x^*(\cdot)$ este o soluție a EDP multi-timp

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - D_\gamma \frac{\partial L}{\partial x_\gamma^i} = a_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \gamma = 1, \dots, m, \quad (E - L)_2$$

care satisface condițiile la frontieră, unde a_i sunt constante arbitrare.

A doua parte a teoremei arată că dacă sistemul $(E - L)_2$ de EDP are soluții, atunci minimizatorul funcționalei J (presupunând că există) se află respectiv printre soluții.

Demonstrație: 1) În primul rând,

$$0 = d \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - D_\gamma \frac{\partial L}{\partial x_\gamma^i} \right) = \frac{\partial(dL)}{\partial x^i} - D_\gamma \frac{\partial(dL)}{\partial x_\gamma^i}.$$

Pe componente, aceasta înseamnă

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial x^j} \right) - D_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma^i} \left(\frac{\partial L}{\partial x^j} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\alpha^j} \right) - D_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma^i} \left(\frac{\partial L}{\partial x_\alpha^j} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial L}{\partial t^\alpha} \right) - D_\gamma \frac{\partial}{\partial x_\gamma^i} \left(\frac{\partial L}{\partial t^\alpha} \right) = 0.$$

2) Rezultatul este obținut prin egalitățile

$$0 = \frac{\partial(dL)}{\partial x^i} - D_\gamma \frac{\partial(dL)}{\partial x_\gamma^i} = d \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - D_\gamma \frac{\partial L}{\partial x_\gamma^i} \right).$$

Teoremă Dacă m -foaia $x^*(\cdot)$ minimizează funcționala $J(x(\cdot))$, atunci $x^*(\cdot)$ este o soluție a EDP multi-timp

$$\frac{\partial L_\beta}{\partial x^i} - D_\gamma \frac{\partial L_\beta}{\partial x_\gamma^i} = 0, \quad \beta, \gamma = 1, \dots, m, \quad (E - L)_3$$

care satisface condițiile la frontieră.

Teorema arată că dacă sistemul $(E - L)_3$ de EDP are soluții, atunci minimizatorul funcționalei J (presupunând că există) se află respectiv printre soluții.

Demonstrație. Considerăm că $x(t)$ este o soluție a problemei precedente. Implicit ea trebuie să satisfacă condițiile de complet integrabilitate ale 1-formei $L_\beta(x(t), x_\gamma(t), t)dt^\beta$, adică,

$$\frac{\partial L_\beta}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial L_\beta}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial L_\beta}{\partial x_\gamma^i} \frac{\partial x_\gamma^i}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial L_\alpha}{\partial t^\beta} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial t^\beta} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial x_\gamma^i} \frac{\partial x_\gamma^i}{\partial t^\beta}.$$

Construim o altă funcție în jurul lui $x(t)$ de forma $x(t) + \varepsilon h(t)$, cu $h(t_0) = 0, h(t_1) = 0$. Aici ε este un parametru "mic", iar h este o variație "mică". Funcționala devine o funcție de ε , adică o integrală cu parametru,

$$J(\varepsilon) = \int_{\Gamma_{t_0, t_1}} L_\beta(t, x(t) + \varepsilon h(t), x_\gamma(t) + \varepsilon h_\gamma(t)) dt^\beta.$$

Acceptăm că variația h satisface condițiile de complet integrabilitate ale 1-formei

$$L_\beta(t, x(t) + \varepsilon h(t), x_\gamma(t) + \varepsilon h_\gamma(t)) dt^\beta.$$

Această condiție adaugă EDP

$$\frac{\partial L_\beta}{\partial x^i} \frac{\partial h^i}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial L_\beta}{\partial x_\gamma^i} \frac{\partial h_\gamma^i}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial L_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial h^i}{\partial t^\beta} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial x_\gamma^i} \frac{\partial h_\gamma^i}{\partial t^\beta},$$

care arată că mulțimea funcțiilor $h(t)$ este un spațiu vectorial, iar mulțimea funcțiilor $x(t) + \varepsilon h(t)$ este un spațiu afin. Se impune

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\varepsilon} J(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = (\dots) = \int_{\Gamma_{t_0, t_1}} \left(\frac{\partial L_\beta}{\partial x^j} h^j + \frac{\partial L_\beta}{\partial x_\gamma^j} h_\gamma^j \right) dt^\beta \\ &= \text{BT} + \int_{\Gamma_{t_0, t_1}} \left(\frac{\partial L_\beta}{\partial x^j} - D_\gamma \frac{\partial L_\beta}{\partial x_\gamma^j} \right) h^j dt^\beta, \end{aligned}$$

unde D_γ este operatorul de derivare totală, care acționează după regula

$$D_\gamma \left(\frac{\partial L_\beta}{\partial x_\gamma^j} h^j \right) = h^j D_\gamma \left(\frac{\partial L_\beta}{\partial x_\gamma^j} \right) + \frac{\partial L_\beta}{\partial x_\gamma^j} D_\gamma h^j.$$

Adăugăm ipoteza

$$D_\gamma \left(h^i \frac{\partial}{\partial x_\gamma^i} L_\beta \right) = D_\beta \left(h^i \frac{\partial}{\partial x_\gamma^i} L_\gamma \right),$$

care restrânge spațiul vectorial al variațiilor $h(t)$ la un subspațiu vectorial. Atunci termenii pe frontieră se scriu

$$BT = \int_{\Gamma_{t_0, t_1}} D_\gamma \left(\frac{\partial L_\beta}{\partial x_\gamma^j} h^j \right) dt^\beta = \int_{\Gamma_{t_0, t_1}} D_\beta \left(\frac{\partial L_\gamma}{\partial x_\gamma^j} h^j \right) dt^\beta = \frac{\partial L_\gamma}{\partial x_\gamma^j} h^j \Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Termenii BT se anulează deoarece $h(t_0) = 0, h(t_1) = 0$. Rămâne

$$0 = \int_{\Gamma_{t_0, t_1}} \left(\frac{\partial L_\beta}{\partial x^j} - D_\gamma \frac{\partial L_\beta}{\partial x_\gamma^j} \right) h^j dt^\beta.$$

Deoarece curba Γ_{t_0, t_1} este arbitrară, găsim sistemul de ecuații cu derivate parțiale din teoremă.

Dinamica descrisă de PDE Euler-Lagrange de ordinul al doilea se numește *dinamică Euler-Lagrange multitemporală*.

4.4 Testul de invexitate

Sa formulam o condiție suficientă neortodoxă pentru existența minimului funcționalei

$$J(x(\cdot)) = \int_{\Gamma_{t_0, t_1}} L_\beta(t, x(t), x_\gamma(t)) dt^\beta, \quad \beta = 1, \dots, m,$$

unde $t \in \Omega_{t_0, t_1}$, $L_\beta(t, x(t), x_\gamma(t)) dt^\beta$ este o 1-formă Lagrangian de clasă C^2 , iar $x : \Omega_{t_0, t_1} \rightarrow R^n$ este o funcție de clasă C^2 .

O funcție $x^*(t)$ se numește *punct critic al funcționalei J* dacă este soluția sistemului Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L_\alpha}{\partial x^i} - D_\gamma \frac{\partial L_\alpha}{\partial x_\gamma^i} = 0,$$

la care se adaugă condițiile la frontieră.

Definiție Fie $x, x^* : \Omega_{t_0, t_1} \rightarrow R^n$ funcții de clasă C^2 . Dacă exista o funcție vectorială $\eta(t, x, x^*, \dot{x}, \dot{x}^*) \in R^n$ cu $\eta = 0$ pentru $x(t) = x^*(t)$, astfel încât

$$J(x(\cdot)) - J(x^*(\cdot)) \geq \int_{\Gamma_{t_0, t_1}} \left(\eta^i \frac{\partial L_\alpha}{\partial x^{*i}} + (D_\beta \eta^i) \frac{\partial L_\alpha}{\partial x_\beta^{*i}} \right) dt^\alpha,$$

pentru orice funcție $x(\cdot)$ și pentru orice curbă Γ_{t_0, t_1} , atunci J se numește *invexă în punctul $x^*(\cdot)$ pe intervalul Ω_{t_0, t_1} în raport cu funcția vectorială η* .

Funcționala J se numește *invexă* dacă este invexă în orice punct $x^*(\cdot)$.

Teoremă Funcționala J este invexă dacă și numai dacă fiecare punct critic este un punct de minim global.

Demonstrație Presupunem ca funcționala J este invexă. Atunci, dacă $x^*(t)$ este soluție a sistemului Euler-Lagrange, avem

$$J(x(\cdot)) - J(x^*(\cdot)) \geq \int_{\Gamma_{t_0, t_1}} \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial x^{*i}} - D_\beta \frac{\partial L_\alpha}{\partial x_\beta^{*i}} \right) \eta^i dt^\alpha + \int_{\Gamma_{t_0, t_1}} D_\alpha \left(\eta^i \frac{\partial L_\beta}{\partial x_\beta^{*i}} \right) dt^\alpha = 0.$$

Rezultă ca un punct critic este un punct de minim global.

Reciproc, presupunem ca fiecare punct critic este punct de minim global. Dacă $x^*(t)$ este un punct critic, atunci punem $\eta = 0$. Dacă $x^*(t)$ nu este un punct critic, adică $\exists \alpha \in \{1, \dots, m\}$, $\exists i \in \{1, \dots, n\}$, să zicem $\alpha = 1$, $i = 1$, atunci

$$\frac{\partial L_1}{\partial x^{*1}} - D_\beta \frac{\partial L_1}{\partial x_\beta^{*1}} \neq 0.$$

Câmpul vectorial ξ de componente

$$\xi^1 = \frac{\partial L_1}{\partial x^{*1}} - D_\beta \frac{\partial L_1}{\partial x_\beta^{*1}}, \quad \xi^i = 0, \quad i \neq 1$$

ne permite să definim câmpul vectorial η de componente

$$\eta^1 = \frac{L_1(t, x, \dot{x}) - L_1(t, x^*, \dot{x}^*)}{2\delta_{ij}\xi^i\xi^j} \xi^1, \quad \eta^i = 0, \quad i \neq 1.$$

Câmpul vectorial η , astfel definit, satisface relația din definiția invexității.

Bibliografie

- [1] C. Fox, *An Introduction to the Calculus of Variations*, Dover Publications, Inc., New York, 1963.
- [2] M. L. Krasnov, G.I. Makarenko, A. I. Kiselev, *Problems and Exercises in the Calculus of Variations*, Mir Publisheres, Moscow, 1975.
- [3] E. Langamann, *Introduction to Variational Calculus*, INTERNET, 2008.
- [4] I. B. Russak, *Calculus of Variations*, MA4311, Lectures Notes, Department of Mathematics, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 93943, July, 2002.

- [5] C. Udriște, *Geometric Dynamics*, Mathematics and Its Applications, 513, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.
- [6] C. Udriște, L. Matei, *Lagrange-Hamilton Theories* (in Romanian), Monographs and Textbooks 8, Geometry Balkan Press, Bucharest, 2008.
- [7] E. T. Whittaker, *A Treatise on The Analytical Dynamics of Particles & Rigid Bodies*, Cambridge University Press, 1989.

Motto: "Carte frumoasă cinste cui te-a scris
Incet gândită, gingaș cumpănită;
Ești ca o floare, anume înflorită
Mâinilor mele, care te-au deschis."

Arghezi - *Ex libris*

CAPITOLUL 3

MODELE OPTIMALE BAZATE PE ENERGII

In acest Capitol prezentăm câteva aplicații selectate din știința și inginerie (brachistochrona, lanțuri, baloane de săpun, grinda încastrată, microstructuri evolutive, sisteme de particule, coarda vibrantă, membrana vibrantă, ecuația Schrödinger), unde calculul variațional este indispensabil. Pentru problemele uni-dimensionale, condițiile la capete vor fi specificate. Pentru problemele multidimensionale, sunt necesare condiții la frontiera. Textele tradiționale se opresc doar la condiții necesare de extrem, întrucât problemele tratate au sigur soluții și odată găsite, ele sunt și nu altele. Noi precizăm și condiții suficiente, dar subliniem că principiile matematice nu sunt întru totul echivalente cu cele fizice.

1 Problema brachistochronei

In 1696 John Bernoulli și-a imaginat următoarea problemă a brachistochronei (în grecește, brachistos = cel mai scurt, chronos = timp).

Problema B *Un punct material alunecă neted și fără frecare, sub acțiunea gravitației, pe un fir subțire, de la punctul $P_0(x_0, y_0)$ la punctul $P_1(x_1, y_1)$. Aflați forma firului, dacă mișcarea se realizează în cel mai scurt timp.*

Soluție Presupunem ca graficul funcției $y = y(x)$ reprezintă forma firului. Fie m masa punctului material și v viteza sa. În punctul $P(x, y)$ acționează forța gravitațională de mărime $F = mg$, unde m este masa punctului material. Lucrul mecanic este dat prin formula $L = Fd$. Energia cinetică se scrie $T = \frac{1}{2}mv^2$. Lucrul mecanic efectuat se identifică cu variația energiei potențiale $mg(y - y_0)$ când ne mutăm din punctul y_0 spre punctul y . Variația corespunzătoare a energiei cinetice este $\frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2)$. Teorema lucru mecanic - energie impune

$$mg(y - y_0) = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2).$$

Presupunem ca particula de masă $m = 1$ pleacă din repaus, adică, $v_0 = 0$. De asemenea știm că $v = \frac{ds}{dt}$, unde s este abscisa curbilinie, adică $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$. Rămâne $\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(y - y_0)}$. Rezultă funcționala

$$T = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - y_0}} dx.$$

Deoarece Lagrangianul $L = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_0}}$ nu depinde de variabila x , ecuația Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0$ se înlocuiește cu integrala primă $y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = c$ sau

$$\frac{y'^2}{\sqrt{(y-y_0)(1+y'^2)}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-y_0}} = c.$$

Această ecuație diferențială este o ecuație cu variabile separate

$$\frac{\sqrt{y-y_0}}{\sqrt{c^2 - (y-y_0)}} dy = dx.$$

Pentru simplificare facem substituția $y = y_0 + k^2 \sin^2 \theta$. Găsim

$$dy = 2k^2 \sin \theta \cos \theta d\theta, \quad dx = 2k^2 \sin^2 \theta d\theta.$$

În felul acesta ecuația Euler-Lagrange are soluția parametrică

$$x = x_0 + \frac{1}{2}k^2(2\theta - \sin 2\theta), \quad y = y_0 + \frac{1}{2}k^2(1 - \cos 2\theta),$$

care reprezintă o familie de cicloide.

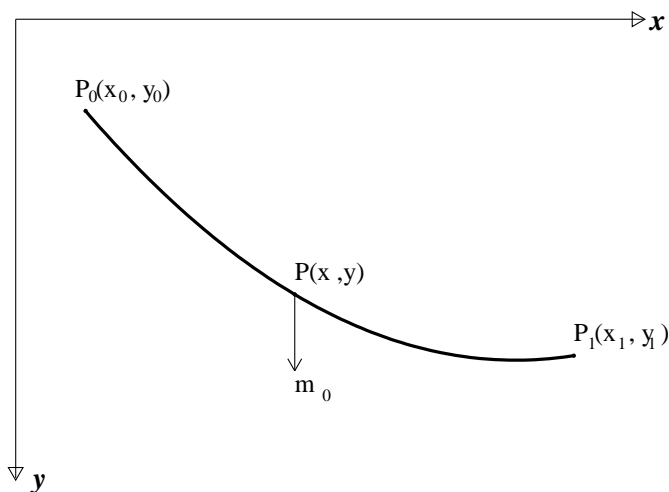


Figura 1: Brachistochrona

Constantele k și x_0, y_0 se obțin din condiția ca cicloida să treacă prin punctul (x_1, y_1) (vezi Figura 1). Soluția asigură minimul funcționalei timp deoarece $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} > 0$ (testul Lagrange).

2 Frânghii, lanțuri și cabluri

Problema FLC Aflați forma unui lanț flexibil de lungime L ce unește punctele $(-l, h)$ și (l, h) , $h > 0$, $L > 2l$, lăsat liber sub influența gravitației.

Soluție Principiu fizic: poziția de echilibru a cablului corepunde la energie potențială minimă. Fie ρ densitatea de masă pe unitatea de lungime, constantă. Elementul de masă dm este localizat în punctul (x, y) . Acest element de masă are energia potențială $dV = (dm)gy = (\rho ds)gy$, unde $ds = \sqrt{1 + y'^2}dx$. Energia potențială totală $V = \int_{-l}^l dV = \rho g \int_{-l}^l y \sqrt{1 + y'^2} dx$ este constrânsa prin $L = \int_{-l}^l \sqrt{1 + y'^2} dx$. Astfel funcția $y = y(x)$ trebuie să fie un punct de minimum al funcționalei energie potențială restricționate. Având o problemă cu restricție izoperimetrică, există un multiplicator Lagrange λ constant, ce schimbă problema cu restricții în problema fără restricții

$$\min_{y(\cdot)} \int_{-l}^l \left(\rho g y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \right) dx.$$

Noul Lagrangian este

$$\mathcal{L} = (\rho g y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2}.$$

Ecuția Euler-Lagrange $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = 0$ devine

$$\frac{d}{dx} \frac{\rho g y y' + \lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} - \rho g \sqrt{1 + y'^2} = 0.$$

Deoarece Lagrangianul \mathcal{L} nu depinde de variabila x , ecuația Euler-Lagrange se transformă în integrala primă $y' \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} - \mathcal{L} = c$ sau $y'^2 = \frac{(\rho g y + \lambda)^2}{c^2} - 1$. Cu schimbarea de funcție $\rho g y + \lambda = cz$, obținem ecuația cu variabile separate $\frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = \frac{\rho g}{c} dx$ cu soluția implicită $\ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) = \frac{\rho g}{c} x + b$. Selectăm $b = -\frac{\rho g}{c} \beta$, rezolvăm în raport cu z și revenim la y . Găsim soluția de forma

$$y(x) = -\frac{\lambda}{\rho g} + \frac{c}{\rho g} \cosh \frac{\rho g(x - \beta)}{c}.$$

În consecință, forma lanțului este graficul funcției cosinus hiperbolic (vezi Figura 2). Deoarece în latina lanțul se cheamă "catena", pentru soluția problemei precedente s-a adoptat numele de "catenary", în română "lanțisor".

Constanta c se fixează prin condiția

$$L = \int_{-l}^l \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{-l}^l \cosh \left(\frac{\rho g x}{c} \right) dx = \frac{2c}{\rho g} \sinh \left(\frac{\rho g l}{c} \right).$$

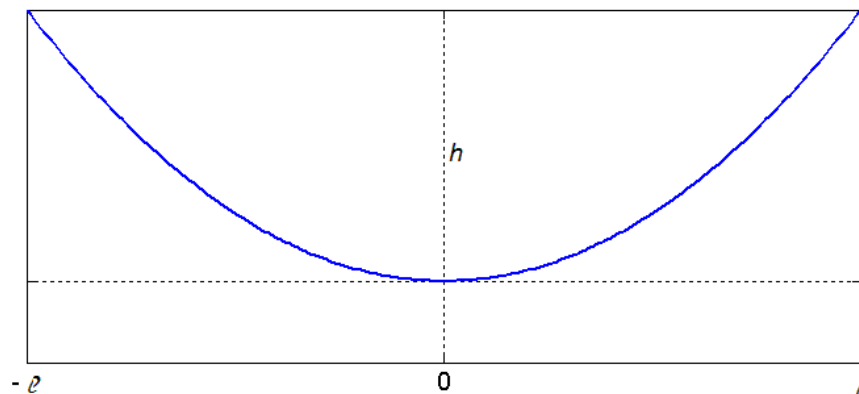


Figura 2: Graficul funcției cosinus hiperbolic

Relațiile $y(-\ell) = y(\ell) = h$ și o alegere potrivită a constantei λ conduc la constanta $\beta = 0$ (vezi Figura 2). Soluția găsită asigură minimul funcționalei deoarece $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} > 0$ (testul Lagrange).

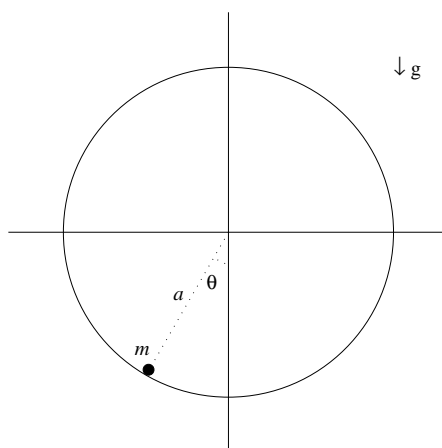


Figura 3: Pendulul plan

3 Pendule

Cele mai simple și mai instructive sisteme mecanice sunt pendulele (Figura 3, Figura 4, Figura 5).

3.1 Pendulul plan

Fie Oy axa verticală. Avem (Figura 3)

$$L = T - U, T = \frac{mv^2}{2}, U = mgy,$$

unde m este masa pendulului, $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ este pătratul lungimii vitezei, g este accelerația căderii libere. Din cauza restricțiilor, sistemul este descris doar de unghiul θ dintre brațul pendulului și direcția negativă a axei Oy . Observăm că $v^2 = \ell^2 \dot{\theta}^2$, $y = -\ell \cos \theta$, $x = \ell \sin \theta$ unde ℓ este lungimea brațului. Astfel

$$L = m\ell^2 \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega^2 \cos \theta \right), \omega^2 = \frac{g}{\ell}.$$

Ecuția Euler-Lagrange este

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta.$$

Testul Legendre: $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\theta}^2} > 0$.

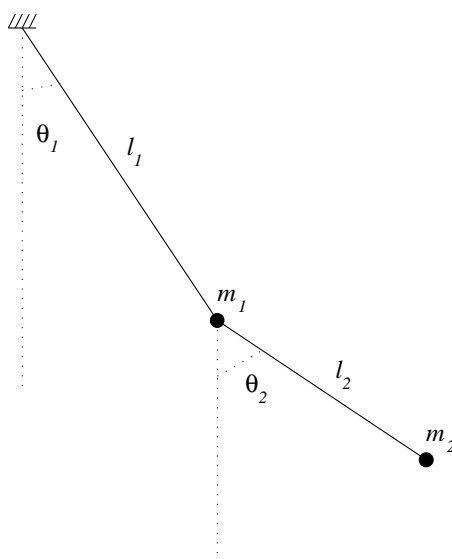


Figura 4: Pendule cuplate

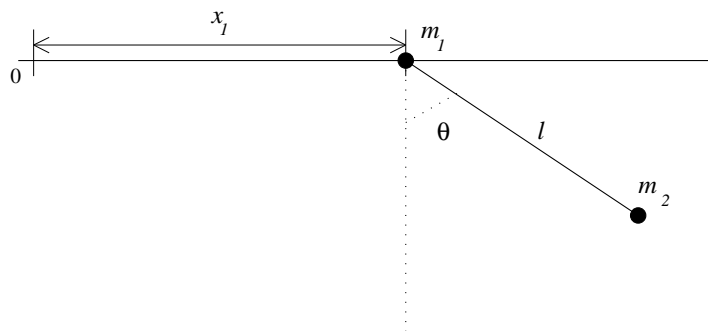


Figura 5: Corp care alunecă, cu pendul atașat

3.2 Pendulul sferic

Fie axa Oz verticală și îndreptată în jos. Forma generală a Lagrangianului este

$$L = T - U, T = \frac{mv^2}{2}, U = -mgz.$$

Cele două grade de libertate sunt parametrizate prin unghiurile sferice θ și φ . Raza sferei este chiar lungimea brațului l . Deoarece

$$x = l \sin \theta \cos \varphi, y = l \sin \theta \sin \varphi, z = l \cos \theta,$$

găsim

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l\dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - l\dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \\ \dot{y} &= l\dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + l\dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{z} &= -l\dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned}$$

Rezultă

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = l^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta).$$

Deducem Lagrangianul

$$L = ml \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \omega^2 \cos \theta \right).$$

Cele două ecuații Euler-lagrange sunt

$$\ddot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - \omega^2 \sin \theta, \frac{d}{dt}(\dot{\varphi} \sin^2 \theta) = 0.$$

3.3 Pendulul de lungime variabilă

Presupunem că lungimea brațului pendulului ℓ depinde de timp, adică $\ell = \ell(t)$ este o funcție dată. Pornim ca la pendulul plan, adică

$$L = T - U, T = \frac{mv^2}{2}, U = mgy = -mg\ell \cos \theta.$$

Acum viteza se împarte în doua componente: componenta $v_{\perp} = \dot{\ell}$ perpendiculara pe fir și componenta $v_{\parallel} = \ell \dot{\theta}$ paralelă cu firul. Rezultă $v^2 = v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 = \dot{\ell}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2$. Astfel putem scrie Lagrangianul

$$L = m \left(\frac{1}{2} \dot{\ell}^2 + g\ell(t) \cos \theta + \frac{1}{2} \ell^2 \dot{\theta}^2 \right).$$

Masa este constantă și ultimul termen din Lagrangian nu modifică ecuația Euler-Lagrange. Rămâne

$$\frac{d}{dt}(\ell^2(t)\dot{\theta}) = -g\ell(t) \sin \theta.$$

3.4 Două pendule interconectate elastic

Vom analiza mișcarea a două pendule interconectate printr-un resort (arc). După cum se observă în Figura 6, fiecare pendul este format dintr-o mică sferă de masă m fixată la capătul inferior al unei tije subțiri și foarte rigide având lungimea ℓ și o greutate neglijabilă. Vom folosi notația k pentru constanta elastică a resortului. Considerăm că distanța dintre articulațiile superioare ale pendulelor este egală cu lungimea resortului în stare netensionată.

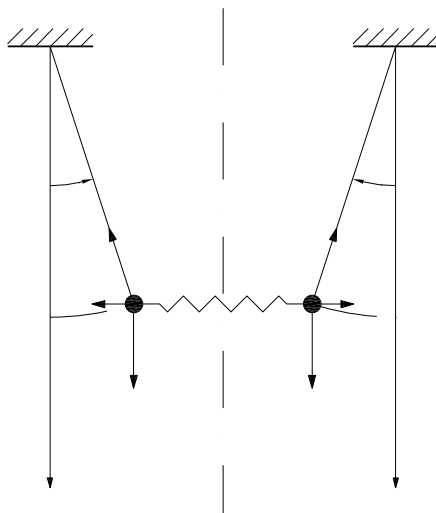


Figura 6: Pendule interconectate elastic

La momentul $t = 0$, sistemul este într-o configurație de repaus în care tijele pendulelor formează unghiul $\theta_0 > 0$ cu verticala, iar resortul este comprimat simetric. Din această stare, sistemul este lăsat să se miște liber. În afară de greutatea proprie G , asupra fiecărui pendul acționează forța elastică F_e dezvoltată de resort, precum și tensiunea T din tijă (vom neglija frânarea exercitată de aerul atmosferic). Rigiditatea articulării obligă ambele mase m să evolueze pe arce de cerc având aceeași rază ℓ . Identitatea perfectă a pendulelor, precum și simetria configurației inițiale permite utilizarea unei singure coordonate generalizate pentru a descrie mișcarea sistemului. Această coordonată este unghiul curent $\theta = \theta(t)$, $t \geq 0$, pe care îl formează tijele de suspensie cu verticala (Figura 6).

Observăm că, în condițiile evoluției pe un arc de cerc a fiecărui pendul, tensiunea T nu efectuează lucru mecanic (deplasarea masei m este perpendiculară pe suportul lui T – vezi Figura 6). Cât privește forțele G și F_e , ambele au un caracter conservativ. Sistemului mecanic din Figura 6 îi poate fi atașată o funcție Lagrange L .

În ceea ce urmează vom proceda la explicitarea termenilor E_c și E_p din structura funcției L . Datorită evoluției pe un arc de cerc, viteza masei m are doar o componentă circumferențială $v_\theta = \ell\dot{\theta}$. Energia cinetică a sistemului din Figura 6 este

$$E_c = 2 \frac{mv_\theta^2}{2} = m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

Energia potențială $E_p = E_{pg} + E_{pe}$ are atât o componentă gravitațională E_{pg} , cât și una elastică E_{pe} . Expresiile acestora sunt

$$E_{pg} = 2mg\ell(1 - \cos\theta), \quad E_{pe} = \frac{k}{2}(2\ell \sin\theta)^2 = 2k\ell^2 \sin^2\theta,$$

unde g – accelerația gravitațională. Astfel energia potențială a sistemului mecanic este

$$E_p = 2\ell \left[mg(1 - \cos\theta) + k\ell \sin^2\theta \right].$$

Rezultă funcția Lagrange

$$L(\theta, \dot{\theta}) = E_c - E_p = \ell \left[m\ell\dot{\theta}^2 - 2mg(1 - \cos\theta) - 2k\ell \sin^2\theta \right].$$

Mișcarea sistemului mecanic din Figura 6 este descrisă de ecuația Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0.$$

Explicit

$$m\ell\ddot{\theta} + mg \sin\theta + 2k\ell \sin\theta \cos\theta = 0,$$

o ecuație diferențială cu necunoscuta $\theta = \theta(t)$. Se adaugă condițiile inițiale $\theta(0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, care definesc parametrii configurației de la momentul $t = 0$ (unghiul și viteza de pornire a pendulelor). Datorită simplității sistemului din Figura 6, ecuația diferențială precedentă are o semnificație mecanică ușor decelabilă. Propriu-zis, ea nu este nimic altceva decât proiecția circumferențială a Legii lui Newton $m\vec{r} - \vec{F} = 0$, în care \vec{F} este rezultanta forțelor aplicate pendulului de masă m .

Din cauza termenilor în care intervin funcțiile sinus și cosinus, ecuația precedentă nu poate fi rezolvată exact. Totuși, pentru unghiuri θ foarte mici (nu mai mult de $0,087266 \text{ rad} = 5^\circ$), dezvoltările în serie Maclaurin

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

și

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

ne permit să adoptăm aproximările

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1.$$

Cu ajutorul acestora, ecuația diferențială se rescrie sub forma liniarizată

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m} \right) \theta = 0.$$

Soluția sa generală este

$$\theta(t) = A \cos \left(t \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}} + \varphi_0 \right), \quad t \geq 0,$$

în care $A > 0$ și φ_0 sunt constante. Valorile constantelor se determină impunând satisfacerea condițiilor menționate. Rezultă sistemul de ecuații

$$A \cos \varphi_0 = \theta_0, \quad \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}} A \sin \varphi_0 = 0.$$

Prin rezolvarea acestuia se obține

$$A = \theta_0, \quad \varphi_0 = 0.$$

După înlocuirea expresiilor, ale constantelor A și φ_0 , formula devine

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left(t \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}} \right), \quad t \geq 0.$$

Se observă că soluția descrie o evoluție periodică a unghiului $\theta = \theta(t)$. Valorile extreme pe care le ia funcția definită mai sus sunt $\pm \theta_0$. Intervalul de timp τ care separă două treceri succesive printr-un maxim (sau minim) al unghiului θ se numește perioadă și este calculabil cu formula

$$\tau = 2\pi / \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}}.$$

Valoarea perioadei τ este independentă de timp. Oscilațiile celor două pendule sunt așadar izocrone. Această concluzie este însă valabilă numai în ipoteza oscilațiilor de amplitudine unghiulară foarte mică, pentru care ecuația diferențială de pornire a fost liniarizabilă.

Viteza circumferențială curentă a pendulelor este definită de relația

$$v_\theta(t) = \ell \dot{\theta} = -\ell \theta_0 \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}} \sin \left(t \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}} \right), \quad t \geq 0.$$

Este ușor de observat că $v_\theta = v_\theta(t)$ are o evoluție periodică descrisă de aceeași mărime τ . Pentru a determina pozițiile unghiulare în care viteza atinge valori extreme, vom impune condiția de anulare a derivatei \dot{v}_θ :

$$\dot{v}_\theta(t) = \ell \ddot{\theta} = -\ell \theta_0 \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m} \right) \cos \left(t \sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}} \right) = \ell \theta \left(\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m} \right) = 0.$$

Rezultă imediat setul de soluții

$$t = \frac{(2n+1)\tau}{4}, \quad n \in N.$$

Constatăm astfel că viteza are maxime și minime atunci când unghiul θ se anulează (deci atunci când tija este paralelă cu verticala ce trece prin articulația fixă).

4 Baloane de săpun

Considerăm graficul unei funcții $y = y(x)$ de clasă C^2 , fixat prin capetele $y(x_1) = y_1$ și $y(x_2) = y_2$. Rotindu-l în jurul axei Ox obținem o suprafața de rotație Σ .

Problema BS *Găsiți curba $y = y(x)$ astfel încât suprafața de rotație Σ să aibă arie minimă.*

Soluție Elementul de arie al suprafeței Σ este $d\sigma = 2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$.
 Obținem funcționala arie

$$S = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

al cărui minim dorim să-l aflăm. Deoarece Lagrangianul $L = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2}$ nu depinde de x , ecuația Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0$ se înlocuiește cu integrala primă $y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = c$ sau explicit cu

$$\frac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - y\sqrt{1 + y'^2} = c.$$

Această ecuație diferențială se scrie în forma simplificată $\frac{dx}{dy} = \frac{c_1}{\sqrt{y^2 - c_1^2}}$, unde $c_1 = -c$, cu soluția $y(x) = c_1 \cosh\left(\frac{x - c_2}{c_1}\right)$, unde c_2 este o constantă. Constantele c_1 și c_2 se fixează prin condițiile $y(x_1) = y_1$ și $y(x_2) = y_2$.

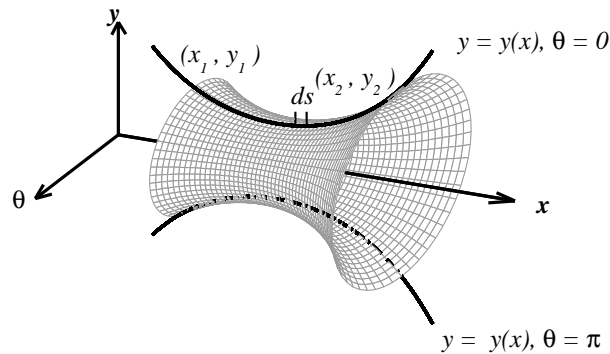


Figura 7: Un catenoid

Astfel obținem un "catenoid" (vezi Figura 7). Soluția găsită asigură minimul funcționalei deoarece $\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} > 0$ (testul Legendre).

5 Grinda încastrată

Un sistem supus la solicitări externe atinge echilibrul termic, adică energia liberă a lui Gibbs este minimizată. Acest principiu termodinamic permite să găsim forma la echilibru a unui corp elastic supus la solicitări externe.

Ca exemplu, considerăm o grindă elastică supusă la solicitarea laterală $w(x)$, ca în Figura 8. Ignorând contribuția entropică, energia liberă a lui Gibbs este entalpia H , adică "energia elastică stocată - lucrul mecanic efectuat de solicitarea externă".

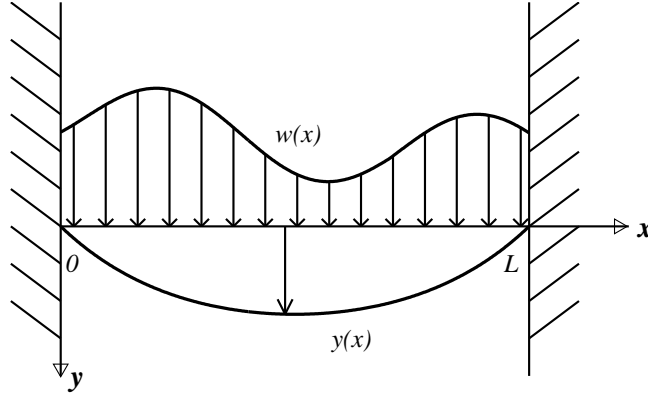


Figura 8: Grindă elastică

Presupunând că grindă are tensiunea liniară T , entalpia poate fi scrisă ca o funcțională de funcția $y(x)$, de clasă C^2 , care dă forma grinzii (acceptând că $y'(x) \ll 1$), adică

$$H(y(\cdot)) = \int_0^L \left(\frac{1}{2} T y'^2(x) - w(x)y(x) \right) dx.$$

Deoarece forma de echilibru minimizează funcționala H , funcția $y(x)$ este soluția ecuației Euler-Lagrange

$$T y''(x) + w(x) = 0.$$

6 Ecuația unei microstructuri evolutive

Evoluția unor sisteme fizice este bazată pe minimizarea energiei libere a lui Gibbs. În această situație se încadrează și modelul câmpului de faze al unei microstructuri de material, al cărui reprezentant clasic este creșterea unui cristal prin solidificarea unui amestec topit. Sistemul poate fi descris printr-un câmp de faze $\phi(x)$ de clasă C^2 , cu $\phi(x) \approx 1$ dacă materialul în punctul x este solid și cu $\phi(x) \approx -1$ dacă el este lichid. Energia liberă a sistemului este funcționala

$$F(\phi(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(U(\phi(x) - 1)^2 (\phi(x) + 1)^2 + \epsilon (\phi'(x) - \alpha \phi(x))^2 \right) dx.$$

Fie Lagrangianul

$$L = \frac{1}{2} \left(U(\phi(x) - 1)^2(\phi(x) + 1)^2 + \epsilon(\phi'(x) - \alpha\phi(x))^2 \right).$$

Primul termen contorizează alternanța $\phi(x) = \pm 1$, iar al doilea termen introduce o penalizare a energiei libere pentru interfața lichid-solid. Extremalele sunt soluții ale ecuației Euler-Lagrange

$$\epsilon\phi''(x) - \epsilon\alpha\phi'(x) - 2U(\phi^2(x) + 1) = 0.$$

7 Evoluția unui sistem format din mai multe particule

Considerăm un sistem de N particule, fixate prin vectorii de poziție $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$, $i = \overline{1, N}$ și prin masele m_i , $i = \overline{1, N}$. Dacă \vec{F}_i este forța totală acționând pe particula i , atunci *legea lui Newton* se scrie $m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$. Notăm cu $\delta\vec{r}_i$ variația poziției particulei i și utilizând produsul scalar cu $\delta\vec{r}_i$, putem scrie

$$\sum_{i=1}^N m_i (\ddot{\vec{r}}_i, \delta\vec{r}_i) - \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i, \delta\vec{r}_i) = 0.$$

Ultimul termen reprezintă lucrul mecanic $\delta W = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i, \delta\vec{r}_i)$ al forțelor \vec{F}_i datorat deplasărilor $\delta\vec{r}_i$. Reamintim că unitatea de măsură pentru forța \vec{F} este *Newtonul* [N], unitatea de măsură pentru variație $\delta\vec{r}$ este *metrul* [m], iar unitatea de măsură pentru lucrul mecanic W este *joule-ul* = 1 newton · metru.

Pe de altă parte folosim identitatea

$$\sum_{i=1}^N (m_i\ddot{\vec{r}}_i, \delta\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i, \delta\vec{r}_i) - \delta \left(\frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i \right) \right).$$

Dacă introducem *energia cinetică*

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2,$$

putem scrie

$$\delta T + \delta W = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}}_i, \delta\vec{r}_i).$$

Adaugam condițiile $\delta\vec{r}_i(t_1) = 0$ și $\delta\vec{r}_i(t_2) = 0$ și integrăm,

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta W) dt = \sum_{i=1}^N m_i \left(\dot{\vec{r}}_i, \delta\vec{r}_i \right) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Presupunem ca există o funcție energie potențială $V = V(\vec{r}_i)$ astfel încât $\delta W = -\delta V$. De exemplu, energia potențială este o funcție de forma

$$V = \sum_{i < j} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|).$$

Introducând funcția lui Lagrange $L = T - V = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i \right) - V$, prin relația

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt = 0$$

recunoaștem condiția necesară ca integrala acțiune $I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ să fie extremă (*principiul Hamilton*), uzual minimă. Rezultă sistemul de ecuații Euler-Lagrange (condiție necesară de extrem)

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Deoarece matricea de componente $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\vec{r}}_i \partial \dot{\vec{r}}_j} = m_i \delta_{ij}$ este pozitiv definită, condiția precedentă este și suficientă pentru existența minimului.

7.1 Conservarea momentului liniar

Lagrangianul

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left(\dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i \right) - \sum_{i < j} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

este invariant în raport cu translația tuturor vectorilor radiali \vec{r}_i prin vectorul constant $\vec{\epsilon}$. Considerând transformarea $\vec{r}_j \rightarrow \vec{r}_j + \vec{\epsilon}$, cu $\|\vec{\epsilon}\| \rightarrow 0$, formal găsim

$$\delta L = \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j} \cdot \vec{\epsilon} = \vec{\epsilon} \cdot \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j}.$$

Pe de altă parte Lagrangianul L este independent de vectorul arbitrar $\vec{\epsilon}$. De aceea putem scrie

$$\vec{\epsilon} \cdot \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j} = 0,$$

relație posibilă doar dacă

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j} = 0.$$

Din ecuațiile Euler-lagrange găsim

$$\sum_{j=1}^N \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j} = 0,$$

adică $\sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j} = \text{const}$, ceea ce înseamnă că momentul liniar

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j} = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j = P$$

se conservă în raport cu translațiile.

7.2 Conservarea momentului unghiular

Lagrangianul

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i) - \sum_{i<j} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

este invariant în raport cu rotația sistemului în jurul unei axe. Într-adevar, acest Lagrangian depinde doar de lungimile vitezelor și de distanța relativă dintre particule. Să fixăm o axă și să considerăm rotația în jurul său de unghi $\delta\varphi$. Deoarece fiecare \vec{r}_j și fiecare $\vec{v}_j = \dot{\vec{r}}_j$ sunt schimbate la rotație în $\vec{r}_j \rightarrow \vec{r}_j + \delta\vec{r}_j$, respectiv $\vec{v}_j \rightarrow \vec{v}_j + \delta\vec{v}_j$, găsim

$$0 = \delta L = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j} \cdot \delta\vec{r}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}_j} \cdot \delta\vec{v}_j \right).$$

Pentru a continua avem nevoie de $\delta\vec{r}_j$ și de $\delta\vec{v}_j$. Acestea apar din observația că orice vector \vec{a} , supus la rotația în jurul unei axe de versor \vec{e} , cu unghiul $\delta\varphi$, se transformă după regula $\vec{a} \rightarrow \vec{a} + \delta\vec{a}$, unde $\delta\vec{a} = \delta\varphi(\vec{e} \times \vec{a})$. Într-adevar, vectorul $\delta\vec{a}$ trebuie să fie perpendicular și pe \vec{e} și pe \vec{a} , cu mărimea $\|\delta\vec{a}\| = \delta\varphi \sin \theta$, unde θ este unghiul dintre \vec{a} și \vec{e} . Rămâne că $\delta\vec{a} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{a}$, unde $\delta\vec{\varphi} = \delta\varphi \vec{e}$.

Revenind la calculul de mai sus, transcriem

$$0 = \delta L = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_j} \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_j) + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{v}}_j} \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{v}_j) \right)$$

sau

$$0 = \delta\vec{\varphi} \cdot \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j} \times \vec{r}_j + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_j} \times \vec{v}_j \right).$$

Deoarece axa este arbitrară, vectorul \vec{e} este arbitrar și deci

$$0 = \sum_{j=1}^N \left(\vec{r}_j \times \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j} + \vec{v}_j \times \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_j} \right).$$

Acum revenim la ecuațiile Euler-lagrange și putem scrie

$$0 = \sum_{j=1}^N \left(\vec{r}_j \times \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_j} + \vec{v}_j \times \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_j} \right).$$

sau

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \times \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_j} = 0.$$

Rezultă conservarea momentului unghiular,

$$\sum_{j=1}^N \vec{r}_j \times m_j \vec{v}_j = \sum_{j=1}^N \vec{r}_j \times \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_j} = \text{const.}$$

7.3 Conservarea energiei

Lagrangianului

$$L = T - V = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\dot{r}_i, \dot{r}_i) - V$$

îi corespunde Hamiltonianul (*energia totală*)

$$H = T + V = \sum_{j=1}^N \dot{r}_j \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_j} - L.$$

Pe de altă parte, Lagrangianul nu depinde de timp și deci

$$\frac{dH}{dt} = \dots = -\frac{\partial L}{\partial t} = 0.$$

7.4 Mișcarea într-un câmp central de forțe

Considerăm cazul unui punct material M de masă $m = \text{const.}$ aflat în mișcare sub acțiunea unui câmp de forțe având rezultanta \vec{F} orientată permanent spre un centru fix O . Vom admite că modulul lui \vec{F} depinde numai de distanța $r = d(O, M)$. Se poate demonstra caracterul conservativ al câmpurilor de forțe care au această proprietate. După cum s-a menționat anterior, în astfel de situații, rezultanta \vec{F} este derivabilă dintr-un potențial $E_p = E_p(r)$. Exemple de câmpuri centrale sunt câmpul gravitațional și câmpul coulombian. În ambele cazuri, energia potențială se exprimă sub forma $E_p = \frac{\kappa}{r}$. Mărimea κ din relația de mai sus este o constantă nenulă. Pentru $\kappa < 0$, forța centrală are un caracter atractiv, iar pentru $\kappa > 0$, caracterul forței devine repulsiv. De asemenea, este demonstrabil faptul că mișcarea punctului material M conservă momentul cinetic raportat la centrul O . Drept consecință, vectorul de poziție $\vec{r} = \vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$ va fi perpendicular pe o axă fixă (direcția constantă a momentului cinetic). Se poate concluziona astfel că traiectoria lui M este o curbă plană. În atare condiții, pentru descrierea mișcării într-un câmp central de forțe este convenabilă utilizarea unui sistem de coordonate polare (r, θ) . Raportată la acest reper, viteza lui M are două componente:

- pe direcție radială: $v_r = \dot{r}$;
- pe direcție circumferențială: $v_\theta = r\dot{\theta}$.

Energia cinetică a punctului material este

$$E_c = \frac{m}{2} (v_r^2 + v_\theta^2) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Deducem Lagrangianul

$$L = L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\kappa}{r}.$$

În mod corespunzător, principiul minimei acțiuni conduce la

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(r, \dot{r}, \dot{\theta}) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\kappa}{r} \right] dt = 0.$$

Ecuațiile Euler-Lagrange sunt

$$\frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

sau, sub formă explicită

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = \frac{\kappa}{r^2}, \quad m \frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = 0.$$

Rezultă integrală primă

$$mr^2\dot{\theta} = J = \text{const.},$$

unde J este *modulul momentului cinetic* al punctului material. Rezultă

$$\dot{\theta} = \frac{J}{mr^2}.$$

Înlocuind în prima dintre ecuații, obținem

$$\ddot{r} - \frac{J^2}{m^2r^3} = \frac{\kappa}{mr^2},$$

o ecuație diferențială în necunoscuta $r = r(t)$. Din păcate, ea nu poate fi rezolvată analitic. Vom încerca să determinăm totuși o soluție, însă de forma $r = r(\theta)$. În acest scop, procedăm la eliminarea variabilei t folosind

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{J}{mr^2}$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2r}{d\theta^2} \left(\frac{J}{mr^2} \right)^2 - \frac{2J}{mr^3} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \frac{J}{mr^2} = \frac{J^2}{m^2r^4} \left[\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right].$$

Găsim

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r = \frac{\kappa mr^2}{J^2}.$$

Pentru rezolvarea ecuației vom recurge la substituția

$$r(\theta) = \frac{1}{w(\theta)}.$$

Prin derivare directă se obțin egalitățile

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{w^2} \frac{dw}{d\theta}, \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{2}{w^3} \left(\frac{dw}{d\theta} \right)^2 - \frac{1}{w^2} \frac{d^2w}{d\theta^2}.$$

Folosindu-ne de ecuațiile precedente, putem rescrie sub forma

$$\frac{d^2w}{d\theta^2} + w + \frac{\kappa m}{J^2} = 0.$$

Această ecuație diferențială este ușor rezolvabilă pentru că are toți coeficienții constanți. Soluția sa are expresia

$$w(\theta) = A \cos(\theta + \Phi) - \frac{\kappa m}{J^2}.$$

Întrucât punctul de start al traiectoriei în planul coordonatelor (r, θ) este lipsit de interes, se poate impune condiția $\Phi = 0$. Astfel

$$w(\theta) = A \cos \theta - \frac{\kappa m}{J^2}.$$

Revenind acum la necunoscuta originală, obținem

$$\frac{1}{r} = A \cos \theta - \frac{\kappa m}{J^2}.$$

Pentru determinarea constantei A este convenabilă utilizarea energiei totale a punctului material. Expresia acestei mărimi este

$$E_{tot} = E_c + E_p = \frac{J^2}{2mr^4} \left[\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right] + \frac{\kappa}{r}.$$

În continuare, folosim soluția pentru explicitarea derivatei

$$\frac{dr}{d\theta} = r^2 A \sin \theta.$$

Inlocuind, rezultă o ecuație în care intervine ca necunoscută doar parametrul A . Soluția acestei ecuații este

$$A = \frac{\kappa m}{J^2} \sqrt{1 + \frac{2E_{tot}J^2}{m\kappa^2}}.$$

Procedând la înlocuirea lui A , se obține ecuația finală a traiectoriei:

$$\frac{1}{r} = -\frac{\kappa m}{J^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2E_{tot}J^2}{m\kappa^2}} \cos \theta \right).$$

Relația de mai sus descrie o conică în coordonate polare (r, θ) . De fapt, ecuația unei asemenea curbe are forma generală

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s} (1 - e \cos \theta),$$

în care $e \geq 0$ este așa-numita *excentricitate*, iar s este un *coeficient de scalare*. Se observă cu ușurință că

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E_{tot}J^2}{m\kappa^2}}, \quad s = -\frac{J^2}{\kappa m}.$$

Cele patru tipuri de conice pe care le poate descrie ecuația precedentă sunt: *cercul* ($e = 0$), *elipsa* ($0 < e < 1$), *parabola* ($e = 1$), respectiv *hiperbola* ($e > 1$).

8 Coarda vibrantă

O cordă este plasată sub tensiune între două puncte fixe. Deplasarea zero se socotește ca poziția de echilibru a corzii. Corzii i se impune o deplasare inițială de la poziția de echilibru, apoi este lasată liberă. Dorim funcția care descrie mișcarea corzii.

Situăm coarda de lungime L pe axa Ox , cu capetele fixate $x = 0$ și $x = L$. Notăm cu $u = u(x, t)$ deplasarea corzii de la punctul curent x [m], pentru $x \in [0, L]$, la timpul t [sec] și presupunem ca funcția $u = u(x, t)$ este de clasă C^2 . Atunci derivata parțială u_x este *panta*, iar u_t este *viteza* într-un punct curent (x, t) al corzii.

Neglijăm forțele de amortizare și presupunem că panta satisface $|u_x| \ll 1$. Pentru a aplica principiul lui Hamilton trebuie să calculăm energia cinetică și energia potențială a corzii. Pentru aceasta, notând cu $\rho(x)$ [kg/m] densitatea liniară de masă a corzii, scriem masa $\rho(x) dx$ a unui element de coardă de lungime dx . Atunci densitatea de energie cinetică este $\frac{1}{2}\rho(x)u_t^2(x, t)$. Integrând obținem energia cinetică

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho(x) u_t^2(x, t) dx, \quad \left[\frac{kg}{m} \right] \left[\frac{m}{sec} \right]^2 [m] = [joule].$$

Energia potențială V a corzii este suma $V = V_1 + V_2$, unde V_1 este lucrul mecanic efectuat pentru a scoate coarda din poziția de echilibru, iar V_2 este lucrul mecanic de întindere care apare datorită capetelor fixe.

Presupunem ca fiecare element al corzii este supus la o forță de întindere constantă τ [N]. Lucrul mecanic de deformare a unui element de coardă dx , din poziția de echilibru, într-un element $ds = \sqrt{1 + u_x^2} dx$, la timpul t , are expresia (forța \times distanța)

$$dV_1 = \tau(ds - dx) = \tau \left(\sqrt{1 + u_x^2} - 1 \right) dx.$$

Deoarece $|u_x| \ll 1$, are loc aproximarea

$$\sqrt{1 + u_x^2} \cong 1 + \frac{1}{2} u_x^2$$

și astfel putem accepta

$$dV_1 = \frac{1}{2} \tau u_x^2 dx.$$

Prin integrare, rezultă

$$V_1(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \tau u_x^2 dx, \quad [N][m] = [joule].$$

La fiecare capăt coarda poate fi privită ca un arc liniar, cu constanta arcului k (k_1 în $x = 0$ și k_2 în $x = L$). Atunci forța arcului este proporțională cu deplasarea. Dacă deplasarea într-un capăt este notată cu ξ , atunci forța arcului este $k\xi$, iar lucrul mecanic elementar este $k\xi d\xi$. Rezultă

$$V_2(t) = \int_0^{u(0,t)} k_1 \xi d\xi + \int_0^{u(L,t)} k_2 \xi d\xi = \frac{1}{2} k_1 u^2(0, t) + \frac{1}{2} k_2 u^2(L, t).$$

Energia totală

$$\mathcal{L}(t) = T(t) - V_1(t) - V_2(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho(x) u_t^2 - \tau u_x^2) dx - \frac{1}{2} k_1 u^2(0, t) - \frac{1}{2} k_2 u^2(L, t),$$

la momentul t , determina energia totală

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t) dt,$$

pe tot intervalul $[t_1, t_2]$. Aceasta energie totală trebuie să atingă o valoare staționară (critică), independent de timpii $t_2 > t_1$.

Problema CV Găsiți punctul critic $u = u(x, t)$, de clasă C^2 , al energiei totale I .

Soluție Energia totală se transcrie ca funcționala (acțiunea)

$$I(u(\cdot), u_t(\cdot), u_x(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L (\rho(x) u_t^2(x, t) - \tau u_x^2(x, t)) dx dt - \frac{1}{2} k_1 \int_{t_1}^{t_2} u^2(0, t) dt - \frac{1}{2} k_2 \int_{t_1}^{t_2} u^2(L, t) dt.$$

Această funcțională (suma dintre o integrală dublă și două integrale temporale la capete) trebuie să atingă un punct staționar, independent de timpii $t_2 > t_1$.

Folosim o variație de forma $U(x, t) = u(x, t) + \epsilon h(x, t)$, unde $h(x, t_1) = 0$, $h(x, t_2) = 0$, $x \in [0, L]$. Presupunem că ρ și τ sunt constante și introducem $\alpha^2 = \frac{\tau}{\rho}$. Folosind Lagrangianul $\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} (\rho u_t^2(x, t) - \tau u_x^2(x, t))$, condiția necesară de extrem este ecuația cu derivate parțiale Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial u} - D_x \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial u_x} - D_t \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial u_t} = 0,$$

adică

$$u_{tt}(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t > 0,$$

cunoscută sub denumirea de *ecuația undelor*.

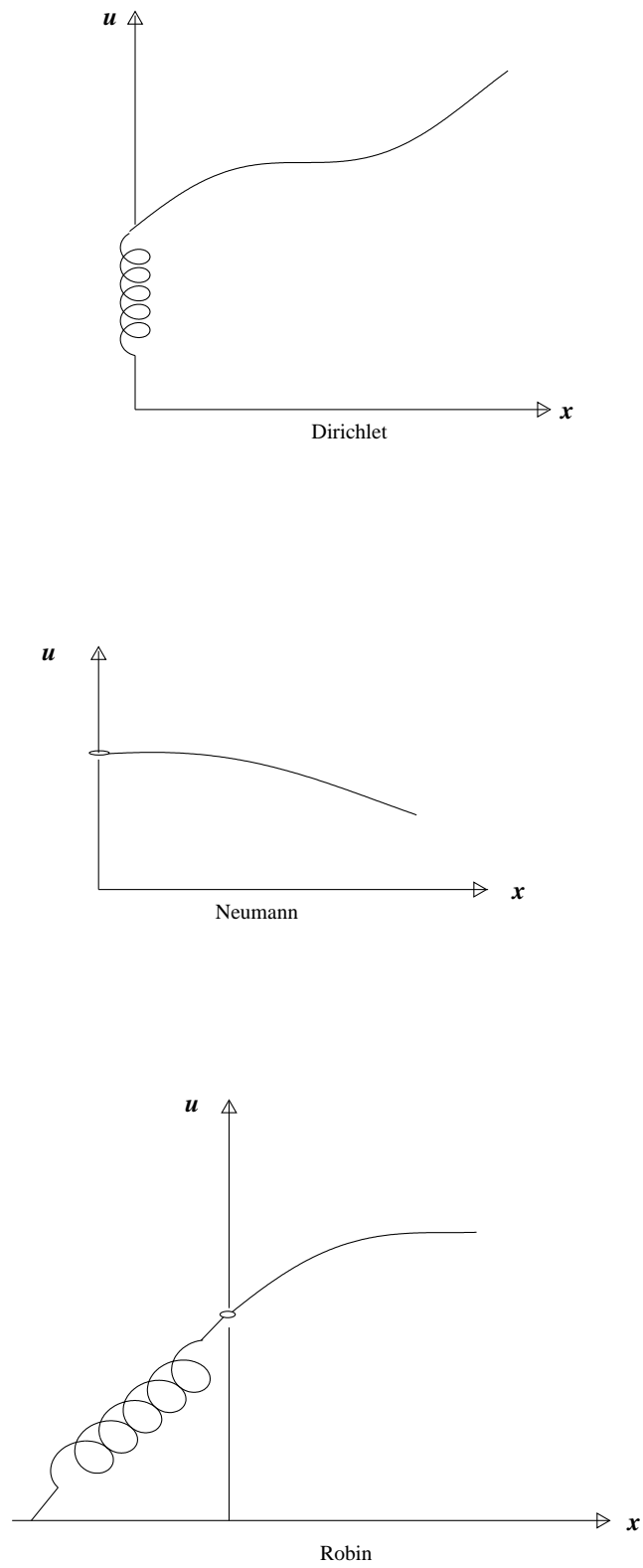


Figura 9: Condiții Dirichlet, Neumann, Robin

Problema CV se reduce la una dintre urmatoarele trei probleme matematice.

(1) **Problema cu valori la frontiera de tip Dirichlet** Dacă $h(0, t) = 0$, $h(L, t) = 0$, atunci la ecuația undelor se adaugă condiția inițială $u(x, 0) = f(x)$ și condițiile la frontiera $u(0, t) = dat$, $u(L, t) = dat$.

(2) **Problema cu valori la frontiera de tip Robin** Dacă $h(0, t)$, $h(L, t)$ sunt arbitrare, atunci la ecuația undelor se adaugă condițiile la frontiera naturale

$$\tau u_x(0, t) - k_1 u(0, t) = 0, \quad \tau u_x(L, t) + k_2 u(L, t) = 0.$$

Vectorul normal la segmentul de ecuație $x = 0$ este $\vec{n} = -\vec{i}$, iar vectorul normal la segmentul de ecuație $x = l$ este $\vec{n} = \vec{i}$. De aceea derivata parțială $u_x(0, t)$ se poate înlocui cu $-\frac{\partial u}{\partial n}(0, t)$ și $u_x(L, t)$ se poate înlocui cu $\frac{\partial u}{\partial n}(L, t)$ (vezi Figura 9).

(3) **Problema cu valori la frontiera de tip Neumann** In cazul special $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, condițiile la frontiera se reduc doar la pante zero la capete, $u_x(0, t) = 0$, $u_x(L, t) = 0$.

9 Membrana vibrantă

Ecuațiile de mișcare ale unei membrane vibrante se obțin similar cu cele ale coardei vibrante. Membrana subțire se extinde pe o regiune Ω care este marginită de o curbă închisă fixată $C = \partial\Omega$. Notăm cu $u = u(x, y, t)$ deplasarea membranei elastice subțiri de la poziția de echilibru $u = 0$. Presupunem ca funcția $u = u(x, y, t)$ este de clasă C^2 . Notăm cu $\rho(x, y)[kg/m]$ densitatea de masă pe unitatea de arie. Atunci densitatea de energie cinetică pe unitatea de arie este $\frac{1}{2}\rho u_t^2(x, y, t) [\frac{kg}{m^2}][\frac{m}{sec}]^2 = [\frac{Nm}{m^2}]$. Integrând obținem energia cinetică

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho u_t^2(x, y, t) dx dy [Nm] = [joule].$$

Energia potențială V a membranei se compune din două părți $V = V_1 + V_2$, unde V_1 este lucrul mecanic efectuat pentru a scoate membrana din poziția de echilibru, iar V_2 este lucrul mecanic de întindere care apare datorită marginei fixe.

Presupunem ca fiecare element de arie al membranei este supus la tensiunea constantă $\tau [N]$. Lucrul mecanic de deformare a unui element de membrană $dA = dx dy$, din poziția de echilibru, într-un element

$$d\sigma = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy,$$

la timpul t , are expresia (forța \times distanța)

$$dV_1 = \tau(d\sigma - dA) = \tau \left(\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1 \right) dx dy.$$

Presupunând $|u_x| \ll 1$, $|u_y| \ll 1$, are loc aproximarea

$$\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \cong 1 + \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2)$$

și astfel putem accepta

$$dV_1 = \frac{1}{2} \tau (u_x^2 + u_y^2) dx dy.$$

Prin integrare, rezultă

$$V_1(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau (u_x^2 + u_y^2) dx dy, \quad [N][m] = [joule].$$

Presupunem că fiecărui punct al frontierei $\partial\Omega$ i se asociază o constantă de arc $k(s)$ care variază în raport cu abscisa curbilinie s a frontierei. Acceptând un arc liniar, forța arcului este proporțională cu deplasarea. Lucrul mecanic total este

$$V_2(t) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} k(s) u^2(s, t) ds,$$

unde $u(s, t)$ reprezintă deplasarea unui punct de pe frontieră de la poziția de echilibru.

Energia totală

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &= T(t) - V_1(t) - V_2(t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\rho u_t^2 - \tau (u_x^2 + u_y^2) \right) dx dy - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} k(s) u^2(s, t) ds, \end{aligned}$$

la momentul t , determină energia totală

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t) dt,$$

pe tot intervalul $[t_1, t_2]$.

Problema MV Găsiți punctul critic $u = u(x, y, t)$, de clasă C^2 , al energiei totale I .

Soluție Energia totală se transcrie ca funcționala (acțiunea)

$$I(u(\cdot), u_t(\cdot), u_x(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \left(\rho u_t^2 - \tau (u_x^2 + u_y^2) \right) dx dy dt$$

$$-\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial\Omega} k(s)u^2(s, t) ds dt.$$

Această funcțională (suma dintre o integrală triplă și o integrală dublă) trebuie să atingă un punct staționar, independent de timpii $t_2 > t_1$.

Pornim cu o variație de forma $U(x, y, t) = u(x, y, t) + \epsilon h(x, y, t)$, unde $h(x, y, t_1) = 0$, $h(x, y, t_2) = 0$, $(x, y) \in \Omega$. Presupunem că ρ și τ sunt constante și introducem $\alpha^2 = \frac{\tau}{\rho}$. Folosind Lagrangianul

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2} \left(\rho u_t^2 - \tau (u_x^2 + u_y^2) \right),$$

condiția necesară de extrem este ecuația cu derivate parțiale Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial u} - D_x \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial u_x} - D_y \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial u_y} - D_t \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial u_t} = 0,$$

adică

$$u_{tt}(x, y, t) = \alpha^2 (u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0,$$

cunoscută sub denumirea de *ecuația bidimensională a undelor*.

Problema MV se reduce la una dintre următoarele trei probleme matematice.

(1) **Problema cu valori la frontieră de tip Dirichlet** Dacă $h(x, y, t)|_{\partial\Omega} = 0$, atunci la ecuația undelor se adaugă condiția inițială $u(x, y, 0) = f(x, y)$ și condiția la frontieră $u(x, y, t)|_{\partial\Omega} = dat$.

(2) **Problema cu valori la frontiera elastice** Dacă $h(x, y, t)|_{\partial\Omega}$ este arbitrară, atunci la ecuația membranei se adaugă condiția la frontieră

$$\tau \frac{\partial u}{\partial n} + k(s)u(s, t) = 0, \quad s \in \partial\Omega.$$

Vectorul normal \vec{n} la frontieră $\partial\Omega$: $\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j}$ are expresia $\vec{n} = \frac{dy}{ds}\vec{i} - \frac{dx}{ds}\vec{j}$ (vezi Figura 10).

(3) **Problema cu valori libere și fixe la frontieră** În cazul special $k(s) = 0$, condiția la frontieră se reduce la $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ pentru $(x(s), y(s)) \in \partial\Omega$. Dacă funcția $k(s)$ crește nemărginit, atunci se impune $u(s, t) = 0$ pentru $(x(s), y(s)) \in \partial\Omega$.

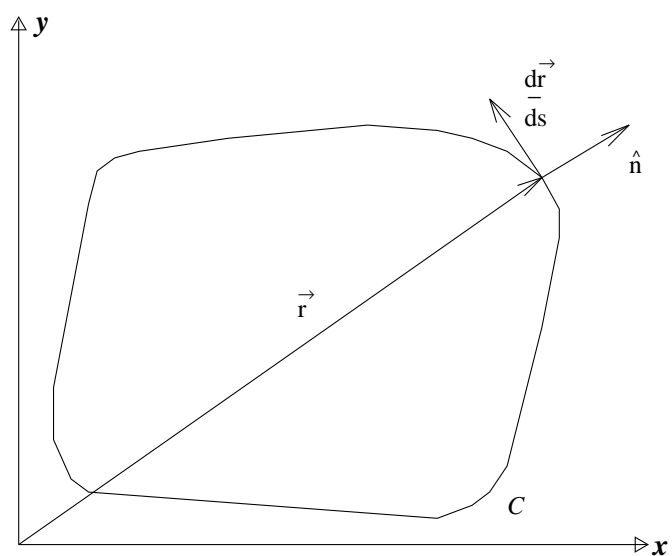
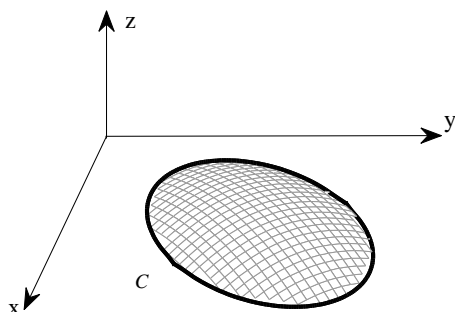


Figura 10: Membrana vibrantă

10 Ecuația Schrödinger din mecanica cuantică

În mecanica cuantică, un electron este descris de o funcție de undă $\psi(x)$ de clasă C^2 . Pentru un singur electron care se mișcă într-un potențial $V(x)$,

operatorul Hamiltonian este

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x),$$

adică

$$\hat{H}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x) + V(x)\psi(x).$$

Energia unui electron este funcționala

$$E(\psi(\cdot)) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \hat{H}\psi(x) dx, \quad \psi(-\infty) = \psi(\infty) = 0,$$

unde $\psi^*(x)$ este complex conjugatul lui $\psi(x)$. Adăugăm restricția (condiția de normalizare)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\psi(x) dx = 1.$$

Pentru simplificare, presupunem ca funcția de undă $\psi(x)$ este reală, adică $\psi^*(x) = \psi(x)$. Folosim Lagrangianul

$$L = \psi^*(x) \hat{H}\psi(x) - \lambda \psi^*(x)\psi(x).$$

Mai observăm că $\lambda = E(\psi(x)) = E$. Cu acestea, ecuația Euler-Lagrange este ecuația Schrödinger

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x).$$

Bibliografie

- [1] C. Fox, *An Introduction to the Calculus of Variations*, Dover Publications, Inc., New York, 1963.
- [2] I. M. Gelfand, S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Dover, New York, 2000.
- [3] H. Härtel, *A Simulation Program for Physics Teaching*, Journal for Science and Education Technology, 9, 3 (2000), 275-286.
- [4] H. Härtel, M. Lüdke, *3D-Simulations of Interacting Particles*, Computing in Science and Engineering, 4 (2000), 87-90.
- [5] M. L. Krasnov, G. I. Makarenko, A. I. Kiselev, *Problems and Exercises in the Calculus of Variations*, Mir Publishers, Moscow, 1975.

- [6] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press, 1969.
- [7] E. Langamann, *Introduction to Variational Calculus*, INTERNET, 2008.
- [8] T. C. A. Molteno, N. B. Tuffiaro, *An experimental investigation into the dynamics of a string*, American Journal of Physics 72, 9 (2004), 1157-1169.
- [9] R. Portugal, L. Golebiowski, D. Frenkel, *Oscillation of membranes using computer algebra*, Am. J. Phys. 67, 6 (1999), 534-537.
- [10] I. B. Russak, *Calculus of Variations*, MA4311, Lectures Notes, Department of Mathematics, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 93943, July, 2002.
- [11] J. C. Slater, N. H. Frank, *Mechanics*, McGraw-Hill, NY, 1947.
- [12] N. B. Tuffiaro, *Nonlinear and chaotic string vibrations*, American Journal of Physics 57, 5 (1989), 408.
- [13] C. Udriște, *Geometric Dynamics*, Mathematics and Its Applications, 513, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.
- [14] C. Udriște, L. Matei, *Lagrange-Hamilton Theories* (in Romanian), Monographs and Textbooks 8, Geometry Balkan Press, Bucharest, 2008.
- [15] E. T. Whittaker, *A Treatise on The Analytical Dynamics of Particles & Rigid Bodies*, Cambridge University Press, 1989.

Motto: "Nu ajunge, vream să zic,
Să fi mare cu cel mic,
Că puterea se adună
Din toți micii împreună."

Arghezi - *Tâlharul pedepsit*

CAPITOLUL 4

LEVITAȚIE, SENZORI, DINAMICA GEOMETRICĂ, MIȘCAREA PARTICULELOR, VÂNT

In acest Capitol prezentăm alte aplicații selectate din știința și inginerie (levitația magnetică, problema senzorilor, mișcarea particulelor în câmpuri, dinamica geometrică, teoria vânturilor), formulate cu ajutorul legilor fizicii. Pentru problemele uni-dimensionale, condițiile la frontieră sunt condiții la capete și vor fi specificate. Pentru problemele multidimensionale, sunt necesare condiții la frontieră. Textele tradiționale se opresc doar la condiții necesare, întrucât problemele tratate au sigur soluții și odată găsite, ele sunt și nu altele. Noi precizăm și condițiile suficiente.

1 Levitația magnetică

In acest paragraf discutăm două metode de a genera traiectorii pentru levitația magnetică (multă vreme, subiect de Science Fiction). Prima se referă la un model neliniar, iar a doua se referă la liniarizarea acestuia.

1.1 Subsistemul electric

Se folosește o configurație de curenți electrici care produce câmpul magnetic înconjurător capabil să creeze levitația unei bile. Electromagnetul are o rezistență R_c și o inductanță ce depinde de poziția bilei, modelată de obicei prin funcția

$$L(x_b) = \bar{L}_1 + \frac{\bar{L}_0}{1 + \frac{x_b}{\alpha}},$$

unde $\bar{L}_0, \bar{L}_1, \alpha$ sunt constante pozitive, iar x_b indică poziția pe verticală a bilei. In loc de $L(x_b)$, noi vom folosi o valoare constantă L_c . Sistemul este echipat și cu un rezistor R_s legat în serie cu o bobină al cărei voltaj poate fi măsurat. Legea lui Kirchoff este echivalentă cu ecuația diferențială

$$V_c(t) = \dot{\Phi}(t) + (R_c + R_s)I_c(t),$$

unde $\Phi(t) = L_c I_c(t)$ este fluxul magnetic.

1.2 Subsistemul electromecanic

Forța electromagnetică F_c indusă de curentul $I_c(t)$, care acționează asupra bilei, are expresia

$$F_c(t) = \frac{K_m I_c^2(t)}{2(x_b(t) + a)^2}, \quad x_b(t) \geq 0,$$

unde K_m este constanta forței electromagnetice și a este o constantă determinată experimental, care previne forța de a deveni infinit când $x_b = 0$.

Forța totală care acționează asupra bilei este

$$-F_c(t) + F_g(t) = -\frac{K_m I_c^2(t)}{2(x_b(t) + a)^2} + M_b g,$$

unde F_g este forța gravitației, M_b este masa bilei și g este constanta gravitațională. Legea lui Newton devine

$$\ddot{x}_b(t) = -\frac{K_m I_c^2(t)}{2M_b(x_b(t) + a)^2} + g.$$

Noi folosim datele experimentale: $M_b = 0.068 \text{ Kg}$, $a = 4.2 \text{ mm}$, $K_m = 1.94 \times 10^{-4} \text{ Nm}^2/\text{A}^2$.

1.3 Modelul neliniar al stărilor

Renotăm poziția bilei cu $x^1 = x_b$, viteza bilei cu $x^2 = \dot{x}_b$, intensitatea curentului din bobina cu $x^3 = I_c$. De asemenea, punem $R = R_c + R_s$ și voltajul la intrare $v = V_c$. Rezultă starea $x = (x^1, x^2, x^3)$ și sistemul diferențial de ordinul întâi

$$\dot{x}^1(t) = x^2(t), \quad \dot{x}^2(t) = -\frac{K_m x^3(t)}{2M_b(x^1(t) + a)^2} + g, \quad \dot{x}^3(t) = \frac{1}{L_c}(-R x^3(t) + v(t)).$$

Evoluția din partea electrică este mult mai rapidă decât evoluția din partea electromecanică. Din punctul de vedere al proiectării, putem neglija dinamica rapidă, lucru ce revine la a impune controlul $u(t) = I_c(t)$ și a studia stările $x = (x^1, x^2)$ prin intermediul sistemului controlat

$$(1) \quad \dot{x}^1(t) = x^2(t), \quad \dot{x}^2(t) = -\frac{K_m u(t)}{2M_b(x^1(t) + a)^2} + g.$$

1.4 Modelul bidimensional liniarizat al stărilor

Un punct de echilibru static $x_{eq} = (x_{b,eq}, 0)$ este caracterizat de faptul că bila este suspendată în aer, la poziția optimală $x_{b,eq}$, datorită unei forțe electromagnetice constante generate de i_{eq} . Deci

$$i_{eq} = \sqrt{\frac{2M_b g}{K_m}} (x_{b,eq} + a).$$

Notând $\xi^1 = x^1 - x_{b,eq}$, $\xi^2 = x^2$, $v = u - i_{eq}$, aproximarea liniară a sistemului diferențial (1) este

$$\dot{\xi}^1(t) = \xi^2(t), \quad \dot{\xi}^2(t) = \frac{2g}{x_{b,eq} + a} \xi^1(t) - \frac{\sqrt{2K_m M_b g}}{M_b(x_{b,eq} + a)} v(t).$$

Transcrierea matriceală este evidentă. Rezulta că acest sistem diferențial este instabil și controlabil (Tema!).

2 Problema senzorilor

Rețelele de senzori sunt prezente în multe probleme practice și teoretice. Aplicațiile includ: monitorizarea mediului (traficul vehiculelor, securitatea vecinătăților, focurile de pădure etc), diagnostice industriale sau agricole (condițiile din fabrici, sănătatea solurilor etc), evoluțiile pe câmpurile de luptă (mișcarea trupelor combatante, mișcarea trupelor inamicului etc).

Fiind dată o mulțime S de n senzori localizați în punctele s_1, \dots, s_n (Figura 1), *puterea de observare colectivă* în raport cu un punct arbitrar p este o funcție de forma

$$I(S, p) = I(f_1(s_1, p), \dots, f_n(s_n, p)),$$

numită și *intensitatea câmpului de senzori*. Teoreticienii au propus două tipuri de intensități: (1) intensitatea câmpului tuturor senzorilor

$$I_t(S, p) = \sum_{i=1}^n f_i(s_i, p);$$

(2) intensitatea max a câmpului senzorilor

$$I_{max}(S, p) = \max_i \{f_i(s_i, p) \mid i = 1, \dots, n\}.$$

Expunerea unui obiect care se mișcă într-un câmp de senzori în intervalul $[t_1, t_2]$, de-a lungul unei curbe $p(t)$, este definită ca o funcțională, prin

$$E(p(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} I(S, p(t)) \left\| \frac{dp}{dt}(t) \right\| dt.$$

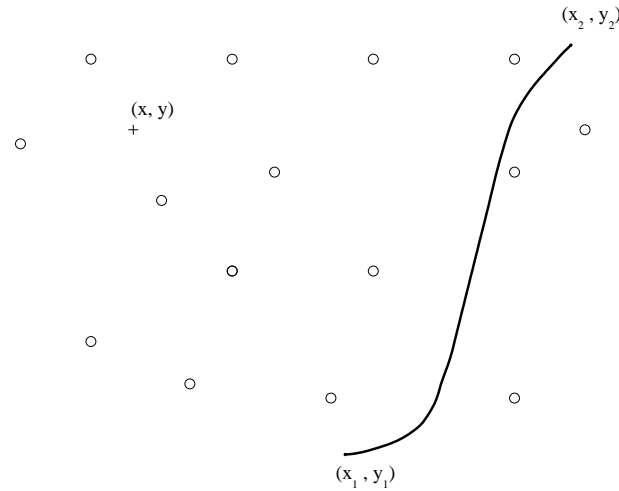


Figura 1: Senzori

Problema E Știind că drumul $p(t)$ și Lagrangianul $L = I(S, p(t)) \left\| \frac{dp}{dt}(t) \right\|$ sunt de clasă C^2 , aflați expunerea minimală.

2.1 Problema simplificată

Luăm în considerare un singur senzor localizat în punctul s și notăm cu $d(s, p)$ distanța de la locația s a senzorului la o locație arbitrară p . Fixăm funcția de senzitivitate ca fiind $f(s, p) = \frac{1}{d(s, p)}$ și căutăm drumul $p(t) = (x(t), y(t))$ de expunere minimală între punctul $A = (x_a, y_a)$ și punctul $B = (x_b, y_b)$, adică cu condițiile la frontieră $x(t_1) = x_a, y(t_1) = y_a$ și $x(t_2) = x_b, y(t_2) = y_b$. Trebuie să minimizăm funcționala expunere

$$E(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} I(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Pentru simplificare trecem la coordonate polare $x(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$, $y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$. Funcționala se schimbă în

$$E(\rho(\cdot), \theta(\cdot)) = \int_{t_1}^{t_2} I(\rho(t), \theta(t)) \sqrt{(\rho\dot{\theta})^2(t) + \dot{\rho}^2(t)} dt.$$

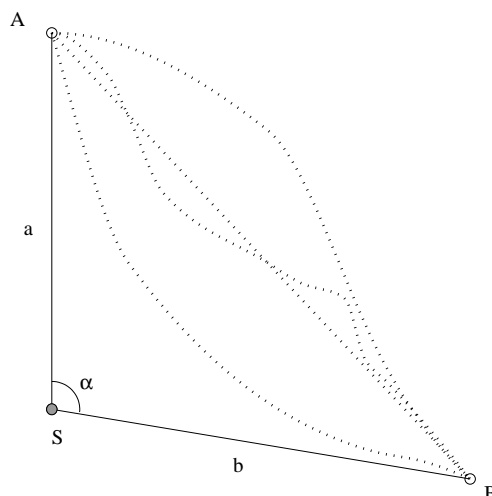


Figura 2: Expunere simplă

Identificând pe t cu θ și notând unghiul $A - \text{senzor} - B$ cu α și $d(s, A) = a$, $d(s, B) = b$, găsim o formă și mai simplificată (vezi Figura 2):

$$E(\rho(\cdot)) = \int_0^\alpha I(\rho(\theta), \theta) \sqrt{\rho^2(\theta) + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}(\theta) d\theta, \rho(0) = a, \rho(\alpha) = b.$$

Deoarece $I(\rho(\theta), \theta) = \frac{1}{\rho}$, Lagrangianul $L = \frac{1}{\rho} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}$ nu depinde de θ și în consecința ecuația Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial L}{\partial \rho'} = 0$ se reduce la integrala primă $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}} = c$. Aceasta ecuație diferențială se mai scrie $\frac{d\rho}{d\theta} = -c_1 \rho$ și are soluția $\rho(\theta) = c_2 e^{\pm c_1 \theta}$. Punând condițiile la capete găsim curba $\rho(\theta) = a e^{\frac{\ln(b/a)}{\alpha} \theta}$. În particular, pentru $a = b$ găsim arcul de cerc $\rho(\theta) = a$ centrat în s și trecând prin punctele A și B . Soluția este optimală întrucât se satisface criteriul Lagrange-Jacobi.

2.2 Extinderea problemei simplificate

Teoremă Presupunem că intensitatea este $I(s, p) = \frac{1}{d^k(s, p)}$, $k > 0$, $k \neq 1$. Fiind date punctele A și B , cu $d(s, A) = a$, $d(s, B) = b$ și $\alpha \leq \frac{\pi}{k-1}$ ca măsură a unghiului $A - \text{senzor} - B$, drumul de expunere minimală are reprezentarea

$$\rho(\theta) = a \left(\cos(k-1)\theta + (\sin(k-1)\theta) \frac{b^{k-1} - \cos(k-1)\alpha}{\sin(k-1)\alpha} \right)^{\frac{1}{k-1}}.$$

Soluție Temă!

3 Mișcarea unei particule în câmpul gravito-vortex netaționar

În spațiul cu trei dimensiuni, considerăm o particulă de masă m , marcată prin vectorul de poziție $\vec{r}(x, y, z)$, ce se mișcă cu viteza $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(x(t), y(t), z(t))$. Lagrangianul (energia cinetică - energia potențială)

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - mU(\vec{r})$$

produce ecuațiile Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = 0.$$

Introducem: (1) viteza absolută $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}$, în raport cu un sistem de coordonate K , care constă din viteza \vec{v} în raport cu sistemul propriu K' , la care se adaugă viteza de rotație $\vec{\omega} \times \vec{r}$ a sistemului K' ; (2) câmpul vectorial vortex $\vec{\Omega} = 2\vec{\omega}$; (3) rescrierea vitezei absolute $\vec{v}' = \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\Omega} \times \vec{r}$. Câmpul vectorial $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{\Omega} \times \vec{r}$ este chiar *vectorul potențial* al câmpului.

Momentul \vec{P} al particulei de masă m , în raport cu un sistem de coordonate arbitrar K , se numește *moment generalizat* și are expresia

$$\vec{P} = m\vec{v}' = \vec{p} + m\vec{A}.$$

El conține momentul $\vec{p} = m\vec{v}$, în relație cu sistemul de coordonate K' . Pe de altă parte știm că momentul \vec{P} este derivata parțială a Lagrangianului în raport cu viteza, adică $\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$. Rezultă că în sistemul de coordonate K , Lagrangianul L se înlocuiește cu

$$L_1 = \frac{1}{2}mv^2 + m \langle \vec{A}, \vec{v} \rangle - mU(\vec{r}).$$

Primul termen este energia cinetică a unei particule libere; ultimii doi termeni descriu interacțiunea particulei cu câmpul.

Ecuațiile Euler-Lagrange produse de L_1 descriu mișcarea în câmpul gravito-vortex. Pentru a le scrie, observăm că dacă acceptăm $\vec{v} = \nabla\varphi$, atunci

$$\frac{\partial L_1}{\partial \vec{r}} = \nabla L_1 = m\nabla \langle \vec{A}, \vec{v} \rangle - m\nabla U$$

$$= m \langle \vec{v}, \nabla \rangle \vec{A} + m\vec{v} \times \text{rot}\vec{A} - m\nabla U$$

In plus,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \vec{v}} = \frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dt} + m \frac{d\vec{A}}{dt}.$$

Deoarece $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \langle \vec{v}, \nabla \rangle \vec{A}$, ecuațiile mișcării sunt

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla U \right) + m\vec{v} \times \vec{\Omega}.$$

In dreapta recunoaștem o forță giroscopică ce se compune din partea gravitațională $\vec{G} = m \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla U \right)$ și din partea giroscopică, propriu-zisă, $m\vec{v} \times \vec{\Omega}$ (care nu produce lucru mecanic).

4 Dinamica geometrică generată de un curent și de o metrică Riemanniană

Fie $X = (X^1, \dots, X^n)$ un câmp vectorial de clasă C^∞ pe varietatea Riemanniană (R^n, δ_{ij}) . Acest câmp determină curentul

$$(1) \quad \dot{x}^i(t) = X^i(x(t)), \quad i = \overline{1, n}.$$

Prelungirea clasică a sistemului diferențial (1) se obține prin derivare de-a lungul unei soluții. Explicit,

$$\ddot{x}^i(t) = \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x(t)) \dot{x}^j(t).$$

Acest ultim sistem diferențial are toate soluțiile sistemului (1), dar mai are și alte soluții.

Ne propunem să modificăm această prelungire într-o prelungire Euler-Lagrange. Pentru aceasta descompunem membrul drept în forma (cu sumare după indicii j)

$$\ddot{x}^i(t) = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} - \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) (x(t)) \dot{x}^j(t) + \frac{\partial X^j}{\partial x^i}(x(t)) \dot{x}^j(t).$$

Apoi în ultimul termen înlocuim pe $\dot{x}^i(t) = X^i(x(t))$. Găsim prelungirea

$$(2) \quad \ddot{x}^i(t) = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} - \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) (x(t)) \dot{x}^j(t) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(x(t)),$$

unde $f(x) = \frac{1}{2} \delta_{ij} X^i(x) X^j(x)$ este densitatea de energie cinetică asociată câmpului vectorial X . Prelungirea (2) se dovedește a fi una Euler-Lagrange. Intr-adevăr, dacă folosim *Lagrangianul celor mai mici pătrate*

$$L = \frac{1}{2} \delta_{ij} (\dot{x}^i - X^i(x))(\dot{x}^j - X^j(x)),$$

atunci ecuațiile Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0$$

sunt chiar ecuațiile (2). Sistemul de ordinul al doilea (2) descrie o mișcare într-un câmp *giroscopic de forțe*, denumită de noi [4], [10]-[16] *dinamică geometrică*. Intr-adevăr, în partea dreaptă recunoaștem o forță giroscopică

$$\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} - \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \dot{x}^j$$

(ce nu produce lucru mecanic) și o forță conservativă ∇f (suma lor fiind un câmp giroscopic de forțe).

Lagrangianul celor mai mici pătrate L produce Hamiltonianul

$$L = \frac{1}{2} \delta_{ij} (\dot{x}^i - X^i(x))(\dot{x}^j + X^j(x)).$$

5 Mișcarea particulei încărcate în câmpul electromagnetic

În această secțiune ne referim la mișcarea sub acțiunea forței Lorentz și la mișcarea numită dinamică geometrică uni-temporală, induse de câmpurile vectoriale electromagnetice.

Fie U un domeniu de mediu izotrop, omogen, liniar, în varietatea Riemaniană ($M = R^3, \delta_{ij}$). Fie $\partial_t =$ operatorul de derivare în raport cu timpul. EDP Maxwell (EDP cuplate de ordinul întâi)

$$\operatorname{div} D = \rho, \operatorname{rot} H = J + \partial_t D,$$

$$\operatorname{div} B = 0, \operatorname{rot} E = -\partial_t B$$

împreună cu ecuațiile constitutive

$$B = \mu H, \quad D = \varepsilon E,$$

pe $R \times U$, reflectă relațiile între câmpurile electromagnetice:

E	$[V/m]$	forța câmp electric
H	$[A/m]$	forța câmp magnetic
J	$[A/m^2]$	densitatea de curent electric
ε	$[As/Vm]$	permitivitatea
μ	$[Vs/Am]$	permeabilitatea
B	$[T] = [Vs/m^2]$	inducția magnetică (densitatea de flux magnetic)
D	$[C/m^2] = [As/m^2]$	deplasare electrică (densitate de flux electric)

Deoarece $\operatorname{div} B = 0$, câmpul vectorial B este fără surse, deci poate fi exprimat ca *rot* al unui vector potențial A , adică, $B = \operatorname{rot} A$. Atunci câmpul electric este $E = -\operatorname{grad} V - \partial_t A$.

Este binecunoscut că mișcarea unei particule încărcate într-un câmp electromagnetic este descrisă de sistemul EDO (*Legea Lorentz universală*)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = e \left(E + \frac{dx}{dt} \times B \right),$$

$$x = (x^1, x^2, x^3) \in U \subset R^3,$$

unde m este *masa* și e este *sarcina* particulei. Desigur, aceste ecuații Euler-Lagrange sunt produse de Lagrangianul Lorentz

$$L_1 = \frac{1}{2} m \delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + e \delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} A^j - eV.$$

Hamiltonianul Lorentz asociat este

$$H_1 = \frac{m}{2} \delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} + eV.$$

O mișcare mecanică similară a fost descoperită de Popescu [7], acceptând existența unui *câmp gravitovortex* reprezentat prin forța $G + \frac{dx}{dt} \times \Omega$, unde G este câmpul gravitațional și Ω este un vortex determinând partea giroscopică a forței. Lucrările noastre recente [4], [10]-[16] confirmă punctul de vedere al lui Popescu prin intermediul dinamicii geometrice.

5.1 Dinamica geometrică uni-temporală indusă de potențialul vectorial A

Pentru conservarea formulelor tradiționale, ne vom referi la liniile de câmp ale potențialului vectorial ”- A ” utilizând relații dimensional omogene. Aceste curbe sunt soluțiile sistemului de EDO

$$m \frac{dx}{dt} = -eA.$$

Acest sistem împreună cu metrica Euclidiană produc Lagrangianul celor mai mici pătrate

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(m \frac{dx^i}{dt} + eA^i \right) \left(m \frac{dx^j}{dt} + eA^j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\| m \frac{dx}{dt} + eA \right\|^2. \end{aligned}$$

Ecuțiile Euler-Lagrange asociate Lagrangianului L_2 sunt

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = e \left(\frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^j} \right) \frac{dx^j}{dt} + \frac{e^2}{m} \frac{\partial f_A}{\partial x^i} - e \partial_t A,$$

unde

$$f_A = \frac{1}{2} \delta_{ij} A^i A^j$$

este *densitatea de energie* produsă de câmpul vectorial A . Equivalent, apare o *dinamică geometrică uni-temporală*

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = e \frac{dx}{dt} \times B + \frac{e^2}{m} \nabla f_A - e \partial_t A, \quad B = \text{rot } A,$$

care este o mișcare într-un câmp giroscopic de forțe [4], [10]-[16] sau o dinamică B -vortex. Hamiltonianul asociat este

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(m \frac{dx^i}{dt} - eA^i \right) \left(m \frac{dx^j}{dt} + eA^j \right) \\ &= \frac{m^2}{2} \delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} - e^2 f_A. \end{aligned}$$

Observație. In general, dinamica geometrică uni-temporală produsă de vectorul potențial ”- A ” este diferită de legea Lorentz universală clasică deoarece

$$L_2 - mL_1 = \frac{1}{2} e^2 \delta_{ij} A^i A^j + meV$$

și forța $\frac{e}{m} \nabla f_A - \partial_t A$ nu este câmpul electric $E = -\nabla V - \partial_t A$. Cu alte cuvinte Lagrangienii L_1 și L_2 nu sunt în aceeași clasă de echivalentă de Lagrangieni.

5.2 Dinamica geometrică uni-temporală produsă de inducția magnetică B

Deoarece dorim să analizăm dinamica geometrică utilizând și unitățile de măsură, curgerea magnetică este descrisă prin

$$m \frac{dx}{dt} = \lambda B,$$

unde unitatea de măsură pentru constanta λ este $[kgm^3/Vs^2]$.

Lagrangianul celor mai mici pătrate este

$$\begin{aligned} L_3 &= \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(m \frac{dx^i}{dt} - \lambda B^i \right) \left(m \frac{dx^j}{dt} - \lambda B^j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\| m \frac{dx}{dt} - \lambda B \right\|^2. \end{aligned}$$

Acesta dă ecuațiile Euler-Lagrange (*dinamica geometrică magnetică uni-temporală*)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda \frac{dx}{dt} \times \text{rot } B + \frac{\lambda^2}{m} \nabla f_B + \lambda \partial_t B,$$

unde

$$f_B = \frac{1}{2} \delta_{ij} B^i B^j = \frac{1}{2} \|B\|^2$$

este *densitatea de energie magnetică*. Aceasta este de fapt o dinamică impusă de o forța giroscopică sau de un J -vortex.

Hamiltonianul asociat este

$$\begin{aligned} H_3 &= \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(m \frac{dx^i}{dt} - \lambda B^i \right) \left(m \frac{dx^j}{dt} + \lambda B^j \right) \\ &= \frac{m^2}{2} \delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} - \lambda^2 f_B. \end{aligned}$$

5.3 Dinamica geometrică uni-temporală produsă de câmpul electric E

Curgerea electrică este descrisă prin

$$m \frac{dx}{dt} = \lambda E,$$

unde unitatea de măsură a constantei λ este $[kgm^2/Vs]$. Apare Lagrangianul celor mai mici pătrate

$$\begin{aligned} L_4 &= \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(m \frac{dx^i}{dt} - \lambda E^i \right) \left(m \frac{dx^j}{dt} - \lambda E^j \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\| m \frac{dx}{dt} - \lambda E \right\|^2, \end{aligned}$$

cu ecuațiile Euler-Lagrange (*dinamică geometrică electrică uni-temporală*)

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \lambda \frac{dx}{dt} \times \text{rot } E + \frac{\lambda^2}{m} \nabla f_E + \lambda \partial_t E,$$

unde

$$f_E = \frac{1}{2} \delta_{ij} E^i E^j = \frac{1}{2} \|E\|^2$$

este *densitatea de energie electrică*; aici avem de fapt o dinamică în $\partial_t B$ -vortex. Hamiltonianul asociat este

$$\begin{aligned} H_4 &= \frac{1}{2} \delta_{ij} \left(m \frac{dx^i}{dt} - \lambda E^i \right) \left(m \frac{dx^j}{dt} + \lambda E^j \right) \\ &= \frac{m^2}{2} \delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} - \lambda^2 f_E. \end{aligned}$$

Problemă deschisă. După cum este binecunoscut, particulele încărcate aflate în câmpul magnetic al pământului spiralează de la pol la pol. Mișcări similare sunt observate în laboratoarele de plasma și se refera la electronii dintr-un metal supus la un câmp magnetic exterior. Până la lucrările noastre, aceste mișcări erau justificate doar prin legea Lorentz universală clasică. Putem justifica aceste mișcări prin dinamica geometrică produsă de câmpuri vectoriale potrivite, în sensul acestui paragraf sau al lucrărilor [4], [10]-[16]?

5.4 Potențiale asociate formelor electromagnetice

Fie $U \subset R^3 = M$ un domeniu de mediu izotrop, omogen și liniar. Ce obiecte matematice descriu câmpurile electromagnetice; câmpuri vectoriale sau forme? S-a arătat [1] că inducția magnetică B , deplasarea electrică D și densitatea de curent electric J sunt toate 2-forme; câmpul magnetic H și câmpul electric E sunt 1-forme; densitatea de sarcină electrică ρ este o 3-formă. Operatorul d este derivata exterioară și operatorul ∂_t este derivata în raport cu timpul.

În termeni de forme diferențiale, *ecuațiile Maxwell* pe $U \times R$ pot fi scrise astfel

$$\begin{aligned} dD &= \rho, & dH &= J + \partial_t D \\ dB &= 0, & dE &= -\partial_t B. \end{aligned}$$

Relațiile constitutive sunt

$$D = \varepsilon * E, \quad B = \mu * H,$$

unde operatorul star $*$ este operatorul Hodge, ε este permitivitatea și μ este permeabilitatea scalară.

Componentele locale E_i , $i = 1, 2, 3$, ale 1-formei E sunt numite *potențiale electrice*, și componentele locale H_i , $i = 1, 2, 3$, ale 1-formei H sunt numite *potențiale magnetice*.

5.5 Potential asociat cu 1-forma electrica E

Să considerăm funcția $V : R \times U \rightarrow R$, $(t, x) \rightarrow V(t, x)$ și ecuația Pfaff $dV = -E$ sau echivalent sistemul de EDP $\frac{\partial V}{\partial x^i} = -E_i$, $i = 1, 2, 3$. Desigur, condițiile de complet integrabilitate cer $dE = 0$ (*câmp electrostatic*), care nu se satisface întotdeauna. În orice situație, putem introduce Lagrangianul celor mai mici pătrate

$$L_9 = \frac{1}{2} \delta^{ij} \left(\frac{\partial V}{\partial x^i} + E_i \right) \left(\frac{\partial V}{\partial x^j} + E_j \right) = \frac{1}{2} \|dV + E\|^2.$$

Acesta produce EDP Euler-Lagrange (ecuație Poisson)

$$\Delta V = -\operatorname{div} E,$$

și prin urmare V trebuie să fie un *potențial electric*. Pentru un material izotrop liniar, avem $D = \varepsilon E$, cu $\rho = \operatorname{div} D = \varepsilon \operatorname{div} E$. Găsim ecuația potențialului pentru un material omogen ($\varepsilon = \text{constant}$)

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Pentru spațiul fără sarcini, avem $\rho = 0$, și atunci potențialul V satisface ecuația Laplace

$$\Delta V = 0$$

(*funcție armonică*). Lagrangianul L_9 produce Hamiltonianul

$$H_9 = \frac{1}{2} (dV - E, dV + E),$$

și câmpul tensorial moment-energie

$$\begin{aligned} T^i_j &= \frac{\partial V}{\partial x^j} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial V}{\partial x^i} \right)} - L_9 \delta_j^i \\ &= \frac{\partial V}{\partial x^j} \left(\frac{\partial V}{\partial x^i} + E_i \right) - L_9 \delta_j^i. \end{aligned}$$

5.6 Potențial asociat 1-formei magnetice H

Acum, să considerăm ecuația Pfaff $d\varphi = H$ sau sistemul de EDP $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = H_i$, $i = 1, 2, 3$, $\varphi : R \times U \rightarrow R$, $(t, x) \rightarrow \varphi(t, x)$. Condițiile de complet integrabilitate $dH = 0$ sunt satisfacute doar în cazuri particulare. Construind Lagrangianul celor mai mici pătrate

$$\begin{aligned} L_{10} &= \frac{1}{2} \delta^{ij} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - H_i \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} - H_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \|d\varphi - H\|^2, \end{aligned}$$

obținem EDP Euler-Lagrange (ecuația Laplace) și prin urmare φ trebuie să fie *potențialul magnetic*. Lagrangianul L_{10} produce Hamiltonianul $H_{10} = \frac{1}{2}(d\varphi - H, d\varphi + H)$.

5.7 Potențial asociat la 1-forma potențial A

Deoarece $dB = 0$, există o 1-formă potențial A satisfăcând $B = dA$. Acum să considerăm ecuația Pfaff $d\psi = A$ sau sistemul echivalent de EDP $\frac{\partial \psi}{\partial x^i} = A_i$, $i = 1, 2, 3$, $\psi : R \times U \rightarrow R$, $(t, x) \rightarrow \psi(t, x)$. Condiția de complet integrabilitate $dA = 0$ este satisfacute doar pentru $B = 0$. Construind Lagrangianul celor mai mici pătrate

$$\begin{aligned} L_{11} &= \frac{1}{2} \delta^{ij} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i} - A_i \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j} - A_j \right) \\ &= \frac{1}{2} \|d\psi - A\|^2, \end{aligned}$$

obținem ecuația Euler-Lagrange (ecuație Laplace) $\Delta\psi = 0$. Lagrangianul L_{11} dă Hamiltonianul $H_{11} = \frac{1}{2}(d\psi - A, d\psi + A)$ și câmpul tensorial moment-energie

$$T^i_j = \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i} - A_i \right) - L_{11} \delta_j^i.$$

Problema deschisă. Gasiți interpretarea extremalelor Lagrangianului celor mai mici pătrate

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{1}{2} \|dA - B\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \delta^{ik} \delta^{jl} \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - B_{ij} \right) \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^k} - B_{kl} \right) \\ L_{13} &= \frac{1}{2} \|dE + \partial_t B\|^2 + \frac{1}{2} \|dH - J - \partial_t D\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|dD - \rho\|^2 + \frac{1}{2} \|dB\|^2, \end{aligned}$$

care nu sunt soluții ale ecuațiilor lui Maxwell.

Observație. Există multe aplicații ale teoriilor de tipul precedent. Una dintre cele mai importante este în *rezistența materialelor*. In probleme asociate cu torsionarea unui cilindru sau a unei prisme, avem de cercetat funcționala

$$J(z(\cdot)) = \int_D \left(\left(\frac{\partial z}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} + x \right)^2 \right) dx dy$$

în sensul găsirii unui extrem. Ecuația Euler-Lagrange $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ arată că extremalele sunt funcții armonice. Desigur, J nu are niciun punct de minim global deoarece sistemul de EDP $\frac{\partial z}{\partial x} = y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -x$ nu este complet integrabil.

6 Teoria vânturilor și dinamică geometrică

Un *vânt* se refera la comportarea dinamica a aerului în condiții atmosferice perturbante. Matematic, vântul este reprezentat de câmpul vectorial viteză $\vec{v}(x, y, z, t)$, $(x, y, z) \in R^3$, $t \in R$, iar forțele perturbante care se aplica particulelor de aer sunt: (1) *forța inertțiala* (reprezentată de accelerația totală) $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v}$; (2) *forța derivată din gradientul presiunii orizontale* $-\frac{1}{\rho} \text{grad } p$; (3) *forța de deviație datorită rotației pământului* $\vec{v} \times \vec{F}_1$; (4) *presiunea de netezire* produsă de mișcarea relativă a straturilor de aer, în sus și în jos, \vec{F}_2 .

Drept urmare apare EDP a mișcării (similară cu EDP Navier Stokes pentru mișcarea unui fluid)

$$\underbrace{\frac{D\vec{v}}{Dt}}_{(1)} = -\underbrace{\frac{1}{\rho} \text{grad } p}_{(2)} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{F}_1}_{(3)} + \underbrace{\vec{F}_2}_{(4)}.$$

Vânturile se clasifică după importanța relativă a celor patru forțe:

(1) *Vântul geostrofic*. Mișcarea este staționară (independentă de timpul t). Rămân numai forțele (2) și (3). Acest vânt se datorează gradientului presiunii orizontale, traiectoriile mișcării fiind *izobare*.

(2) *Vântul gradient*. Prima forță se aproximează cu $\frac{v^2}{R}$, unde R este raza de curbură a izobarelor. Accelerația parțială $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ și a patra forță se omit. Rămâne că gradientul presiunii este o funcție pătratică de viteză.

(3) *Vântul antitriptic*. Forțele (2) și (4) sunt dominante. Forța (4) reprezintă frecarea la nivelul pământului și astfel este o forță opusă direcției mișcării. Vântul evoluează spre presiune scăzută.

(4) *Vântul ageostrofic*. Se departajează de vântul geostrofic printr-o mișcare fără frecare. Termenul (4) este dominant și exprimă convecția sau tararea la nivelul solului.

Dinamica geometrică este similară cu teoria vânturilor, doar că în loc de câmpul vectorial viteză $\vec{v}(x, y, z, t)$ pe $R^3 \times R$ folosim câmpul vectorial viteză $\vec{v}(t)$ de-a lungul unei curbe (pe R). Atunci termenul $(\vec{v} \nabla) \vec{v}$ din accelerația totală nu există.

În cele ce urmează, vom arăta că anumite curgeri elementare, precum pendulară și Lorenz, generează vânturi.

6.1 Dinamică geometrică pendulară și vântul pendular

Utilizăm varietatea Riemanniană (R^2, δ_{ij}) . Oscilațiile mici ale unui pendul plan sunt soluțiile sistemului diferențial

$$\frac{dx^1}{dt} = -x^2, \quad \frac{dx^2}{dt} = x^1.$$

În acest caz $x^1(t) = 0, x^2(t) = 0, t \in R$, este punctul de echilibru și $x^1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, x^2(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t, t \in R$, este soluția generală (familie de cercuri concentrice).

Fie

$$X = (X^1, X^2), \quad X^1(x^1, x^2) = -x^2, \quad X^2(x^1, x^2) = x^1, \\ f(x^1, x^2) = \frac{1}{2}((x^1)^2 + (x^2)^2), \quad \text{rot} X = (0, 0, 2), \quad \text{div} X = 0.$$

Curentul pendular conservă aria.

Prelungirea sa prin derivare este $\ddot{x}^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \dot{x}^j$ sau $\ddot{x}^1 = -\dot{x}^2, \ddot{x}^2 = \dot{x}^1$. Aceasta prelungire are soluția generală (familie de cercuri)

$$x^1(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t + h, \quad x^2(t) = a_1 \sin t - a_2 \cos t + k, \quad t \in R.$$

Dinamica geometrică pendulară este descrisă de sistemul diferențial

$$\ddot{x}^i = \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j} - \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \dot{x}^j + \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

sau explicit

$$\ddot{x}^1 = x^1 - 2\dot{x}^2, \quad \ddot{x}^2 = x^2 + 2\dot{x}^1,$$

cu soluția generală (familie de spirale)

$$x^1(t) = b_1 \cos t + b_2 \sin t + b_3 t \cos t + b_4 t \sin t,$$

$$x^2(t) = b_1 \sin t - b_2 \cos t + b_3 t \sin t - b_4 t \cos t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Să explicăm acum cum apare vântul pendular (geostrofic) produs de un curent pendular și de metrica Euclidiană. Mai întâi extindem câmpul vectorial pendular de la R^2 la R^3 , adică punem $X = (X^1, X^2, X^3)$ cu $X^1(x^1, x^2) = -x^2$, $X^2(x^1, x^2) = x^1$, $X^3(x^1, x^2) = 0$. Câmpul vectorial $\text{rot } X = (0, 0, 2)$ poate fi scris în forma $\text{grad } \varphi$, unde $\varphi(x^1, x^2, x^3) = 2x^3$. Prin urmare vântul pendular este descris de sistemul diferențial

$$\ddot{x} = \text{grad } f + \text{grad } \varphi \times \dot{x}.$$

6.2 Dinamica geometrică Lorenz și vântul Lorenz

Utilizăm varietatea Riemanniană (R^3, δ_{ij}) . Curentul Lorenz este primul model disipativ cu comportare haotică descoperit prin experimente numerice. Ecuațiile diferențiale de stare sunt

$$\dot{x}^1 = -\sigma x^1 + \sigma x^2, \quad \dot{x}^2 = -x^1 x^3 + r x^1 - x^2, \quad \dot{x}^3 = x^1 x^2 - b x^3,$$

unde σ, r, b sunt parametri reali. În mod uzual parametrii σ, b sunt ținuți ficși în timp ce r se consideră variabil. Comportarea haotică se observă pentru

$$r > r_0 = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}.$$

Cu $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$, egalitatea precedentă dă $r_0 = 24,7368$. Dacă $\sigma \neq 0$ și $b(r - 1) > 0$, atunci punctele de echilibru ale curentului Lorenz sunt

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

$$x = \pm \sqrt{b(r - 1)}, \quad y = \pm \sqrt{b(r - 1)}, \quad z = r - 1.$$

Fie $X = (X^1, X^2, X^3)$ cu

$$X^1 = -\sigma x^1 + \sigma x^2, \quad X^2 = -x^1 x^3 + r x^1 - x^2, \quad X^3 = x^1 x^2 - b x^3$$

și

$$2f = (-\sigma x^1 + \sigma x^2)^2 + (-x^1 x^3 + r x^1 - x^2)^2 + (x^1 x^2 - b x^3)^2$$

$$\text{rot } X = (2x^1, -x^2, r - x^3 - \sigma).$$

Dinamica geometrică este descrisă prin

$$\ddot{x}^1 = \frac{\partial f}{\partial x^1} + (\sigma + x^3 - r)\dot{x}^2 - x^2\dot{x}^3$$

$$\ddot{x}^2 = \frac{\partial f}{\partial x^2} + (-\sigma - x^3 + r)\dot{x}^1 - 2x^1\dot{x}^3$$

$$\ddot{x}^3 = \frac{\partial f}{\partial x^3} + x^2\dot{x}^1 + 2x^1\dot{x}^2.$$

Să explicăm acum cum apare vântul geostrofic Lorenz (produs de curentul Lorenz și de metrica Euclidiană). Deoarece $\Delta X = 0$, adică $\Delta X^i = 0$, rezultă $\Delta f \geq 0$, adică f este funcție subarmonica. Prin urmare punctele critice ale lui f nu pot fi puncte de maxim.

Remarcăm că $\text{rot } X$ poate fi scris în forma $\text{grad } \varphi$, unde

$$\varphi = (x^1)^2 - \frac{1}{2}(x^2)^2 - \frac{1}{2}(x^3 + \sigma - r)^2.$$

Prin urmare vântul Lorenz este descris prin sistemul diferențial

$$\ddot{x} = \text{grad } f + \text{grad } \varphi \times \dot{x}.$$

Bibliografie

- [1] A. Bossavit, *Differential forms and the computation of fields and forces in electromagnetism*, Eur. J. Mech., B, Fluids, 10, no 5(1991), 474-488.
- [2] C. Fox, *An Introduction to the Calculus of Variations*, Dover Publications, Inc., New York, 1963.
- [3] Q. Huang, *Solving an open sensor exposure problem using variational calculus*, manuscript, INTERNET.

- [4] D. Isvoranu, C. Udriște, *Fluid flow versus Geometric Dynamics*, 5-th Conference on Differential Geometry, August 28-September 2, 2005, Mangalia, Romania; BSG Proceedings 13, pp. 70-82, Geometry Balkan Press, 2006.
- [5] I. N. Popescu, *Gravitation*, Editrice Nagard, Roma, Italy, 1988.
- [6] E. Langamann, *Introduction to Variational Calculus*, INTERNET, 2008.
- [7] M. L. Krasnov, G. I. Makarenko, A. I. Kiselev, *Problems and Exercises in the Calculus of Variations*, Mir Publisheres, Moscow, 1975.
- [8] I. B. Russak, *Calculus of Variations*, MA4311, Lectures Notes, Department of Mathematics, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 93943, July, 2002.
- [9] F. Suryawan, J. De Doná, M. Seron, *Methods for trajectory generation in magnetic levitation system under constraints*, manuscript, INTERNET.
- [10] C. Udriște, *Geometric dynamics*, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, Springer-Verlag, 24, 1 (2000), 313-322.
- [11] C. Udriște, *Geometric Dynamics*, Mathematics and Its Applications, 513, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2000.
- [12] C. Udriște, M. Ferrara, D. Opreș, *Economic Geometric Dynamics*, Monographs and Textbooks 6, Geometry Balkan Press, Bucharest, 2004.
- [13] C. Udriște, *Tools of geometric dynamics*, Buletinul Institutului de Geodinamică, Academia Română, 14, 4 (2003), 1-26; Proceedings of the XVIII Workshop on Hadronic Mechanics, honoring the 70-th birthday of Prof. R. M. Santilli, the originator of hadronic mechanics, University of Karlstad, Sweden, June 20-22, 2005; Eds. Valer Dvoeglazov, Tepper L. Gill, Peter Rowland, Erick Trel, Horst E. Wilhelm, Hadronic Press, International Academic Publishers, December 2006, ISBN 1-57485-059-28, pp 1001-1041.
- [14] C. Udriște, A. Udriște, *From flows and metrics to dynamics and winds*, Bull. Cal. Math. Soc., 98, 5 (2006), 389-394.
- [15] C. Udriște, L. Matei, *Lagrange-Hamilton Theories* (in Romanian), Monographs and Textbooks 8, Geometry Balkan Press, Bucharest, 2008.
- [16] C. Udriște, D. Zugrăvescu, F. Munteanu, *Nonclassical Electromagnetic Dynamics*, WSEAS Transactions on Mathematics, 7, 1 (2008), 31-39.

Motto: "În găoacea cea mai mică
E ghiocul tău, fetică
Ești, pe lumea de subt cer,
Cel mai mare inginer."

Arghezi - *Fetica*

CAPITOLUL 5

APLICAȚII ALE CALCULULUI VARIAȚIONAL ÎN ELASTICITATEA LINIARĂ

Această secțiune abordează aspecte referitoare la analiza stării de tensiuni și deformații a corpurilor liniar elastice, prin intermediul calculului variațional. Problemele dezbătute includ: minimul energiei potențiale elastice, deformații și tensiuni, EDP de evoluție, principiu variațional, echilibrul unui fir flexibil solicitat de greutatea proprie etc

1 Minimul energiei potențiale elastice

1.1 Notății și ipoteze

Înainte de a trece la exprimarea problemei în limbaj matematic, prezentăm câteva notații și ipoteze care vor fi utilizate frecvent în continuare.

Vom nota cu Ω domeniul spațial ocupat de un *corp elastic* în configurația sa nedeformată (fig. 1). Admitem că frontiera Σ a domeniului Ω este o suprafață închisă și netedă pe porțiuni. Vom numi particulă echivalentul material M al fiecărui punct $P \in \Omega$. Poziția lui M va fi precizată folosind coordonatele carteziene ortogonale (x, y, z) ale corespondentului său geometric P .

Presupunem că asupra corpului acționează numai încărcări de natură mecanică. Vom împărți aceste încărcări în două categorii: *forțe volumice* (numite astfel pentru că acționează asupra tuturor particulelor corpului), respectiv *forțe de suprafață* (numite astfel pentru că acționează asupra particulelor aflate în anumite porțiuni ale frontierei Σ). Greutatea proprie este un exemplu tipic de forță volumică. Încărcările de suprafață sunt asociate de regulă interacțiunilor de contact cu alte corpuri (aflate în stare solidă, lichidă sau gazoasă). Un exemplu de asemenea încărcare este presiunea exercitată de un lichid asupra peretelui interior al unui cilindru hidraulic. Forțele volumice sunt descrise prin densitatea lor spațială \vec{b}^* , iar forțele de suprafață – prin densitatea lor superficială \vec{s}^* . Vom nota cu Σ_s porțiunea de pe frontiera Σ pe care acționează forțe de suprafață (echivalentul acestor forțe este reprezentat de ansamblul condițiilor la limită de tip încărcare superficială).

Corpul studiat poate fi supus și unor *restricții de mișcare*. În general, aceste constrângeri de natură cinematică se exprimă sub forma unor condiții impuse deplasărilor particulelor de pe anumite porțiuni ale frontierei Σ .

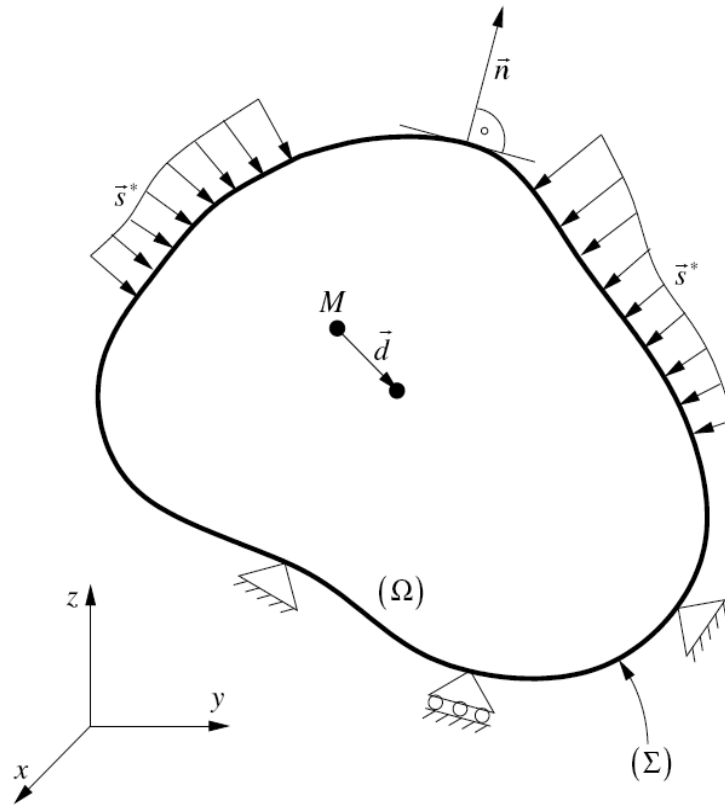


Figura 1: Corp cu încărcături mecanice

Vom nota cu Σ_d zona de frontieră pe care sunt specificate restricții de mișcare (acestea se numesc condiții la limită de tip deplasare). Porțiunile Σ_s și Σ_d ale suprafeței Σ se află în următoarele relații:

$$\Sigma_s \cup \Sigma_d = \Sigma, \quad \Sigma_s \cap \Sigma_d = \emptyset.$$

Acestea arată că în fiecare punct de pe frontiera corpului trebuie precizată fie o încărcare exterioară, fie o restricție de mișcare, însă în niciun caz ambele deodată. Dacă ne gândim puțin, vom constata că regula de mai sus este foarte naturală. Într-adevăr, acolo unde sunt impuse deplasări ne interesează calculul reacțiilor asociate. Invers, acolo unde sunt precizate anumite încărcări ne interesează deplasările rezultante. Niciodată nu este corect să introducem restricții de mișcare și forțe superficiale într-un același punct de pe frontieră, fiindcă putem veni în contradicție cu ecuațiile care descriu comportarea mecanică a corpului.

Deplasările particulelor sunt descrise de un câmp vectorial \vec{d} care leagă poziția lor inițială de cea finală (fig. 1). Vom nota cu u , v și w componentele lui \vec{d} pe axele x , y , respectiv z . Admitem că deplasările sunt foarte mici în raport cu dimensiunile corpului din configurația inițială. Drept consecință,

putem scrie ecuațiile de echilibru mecanic pe domeniul Ω și frontiera Σ fără a comite erori semnificative. Dacă ar fi să operăm riguros, ar trebui să exprimăm aceste ecuații în configurația finală a corpului. O asemenea abordare ar da naștere la complicații matematice serioase și nu s-ar justifica în cazul unor deformații foarte mici.

1.2 Deformații și tensiuni

Distorsiunile corpului sunt descrise cu ajutorul unui set de șase mărimi:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

ε_x , ε_y și ε_z se numesc *deformații liniare*, iar γ_{xy} , γ_{yz} și γ_{zx} se numesc *deformații unghiulare*. Din punct de vedere mecanic, aceste mărimi reflectă discrepanțele dintre deplasările particulelor învecinate. Concret, dacă două particule infinit apropiate au tendința de a se mișca la fel, deformațiile din zona respectivă a corpului vor fi zero. Atunci când particulele vecine tind să se miște diferit, corpul va suferi distorsiuni locale, iar deformațiile date de relațiile de mai sus vor fi nenule.

Pentru descrierea solicitărilor interne vom utiliza alte șase mărimi, notate σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} și τ_{zx} . Primele trei se numesc *tensiuni normale*, iar ultimele trei, *tensiuni tangențiale*. Semnificația acestor mărimi rezultă din următoarele relații:

$$s_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{zx} n_z, \quad s_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z, \quad s_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z.$$

Propriu-zis, tensiunile σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} și τ_{zx} definesc componentele s_x , s_y și s_z ale unui câmp vectorial \vec{s} reprezentând densitatea superficială a forțelor interne exercitate de o parte a corpului asupra celeilalte părți, la nivelul unei suprafețe de separație imaginare cu normala definită local de versorul \vec{n} , ale cărui proiecții pe axele sistemului de coordonate carteziene sunt n_x , n_y și n_z . Trebuie precizat faptul că la nivelul porțiunii Σ_s a frontierei Σ operează restricția $\vec{s} = \vec{s}^*$, explicitabilă pe componente sub forma

$$s_x(x, y, z) = s_x^*(x, y, z), \quad s_y(x, y, z) = s_y^*(x, y, z), \quad s_z(x, y, z) = s_z^*(x, y, z),$$

unde $(x, y, z) \in \Sigma_s$.

1.3 EDP de evoluție

Se poate demonstra că tensiunile σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} și τ_{zx} verifică următorul set de ecuații cu derivate parțiale în orice punct al domeniului Ω pe care îl ocupă un corp deformabil aflat în echilibru static:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x^* = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y^* = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z^* = 0$$

(b_x^* , b_y^* și b_z^* sunt componentele densității spațiale a încărcărilor volumice \vec{b}^*). Egalitățile precedente se numesc *ecuații de echilibru Cauchy*.

Legătura dintre tensiuni și deformații este definită cu ajutorul relațiilor constitutive. Admitem că materialul corpului se caracterizează printr-un comportament linear elastic izotrop. În aceste condiții, relațiile constitutive pot fi scrise sub forma dată de *legea lui Hooke*,

$$\sigma_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_x,$$

$$\sigma_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_y,$$

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z,$$

$$\tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = \mu\gamma_{zx},$$

sau, în varianta inversă,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_x - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right],$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_y - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right],$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2\mu} \left[\sigma_z - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right],$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/\mu, \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/\mu, \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx}/\mu.$$

Mărimile λ și μ care intervin în formulele precedente sunt caracteristici de material numite *constantele lui Lamé*.

Prin urmare, deformarea unui corp linear elastic izotrop este descrisă printr-un sistem de cincisprezece EDP definite pe domeniul Ω , având ca necunoscute

componentele u , v și w ale câmpului deplasărilor, deformațiile ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} și γ_{zx} , respectiv tensiunile σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} și τ_{zx} . După cum s-a menționat anterior, acestui sistem i se atașează două tipuri de condiții la limită:

- condiții de tip deplasare:

$$u(x, y, z) = u^*(x, y, z), v(x, y, z) = v^*(x, y, z), w(x, y, z) = w^*(x, y, z),$$

$(x, y, z) \in \Sigma_d$, în care u^* , v^* și w^* sunt componentele unui câmp de vectori deplasare cunoscut pe porțiunea Σ_d a frontierei;

- condiții de tip încărcare superficială:

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{zx} n_z = s_x^*(x, y, z),$$

$$\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = s_y^*(x, y, z),$$

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z = s_z^*(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma_s,$$

în care s_x^* , s_y^* și s_z^* sunt componente ale unui câmp de forțe superficiale care acționează pe porțiunea Σ_s a frontierei, iar n_x , n_y și n_z sunt componente locale ale versorului normală exterioară la frontieră (fig. 1). În general, s_x^* , s_y^* și s_z^* sunt mărimi cunoscute. Dacă unele dintre ele sunt nule, membrii dreapți core-spunzători din egalitățile precedente vor fi zero. Sistemul de ecuații cu derivate parțiale prezentat anterior poate fi redus în așa fel încât să nu mai conțină decât trei necunoscute. Propriu-zis, dacă înlocuim expresiile deformațiilor în legea lui Hooke, obținem relații directe între tensiuni și deplasările particulelor. Mai departe, procedând la înlocuirea acestor relații în ecuațiile de echilibru static, ajungem la un sistem de trei ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea având ca necunoscute doar câmpurile u , v și w . Condițiile la limită în deplasări pot fi lăsate așa cum sunt întrucât implică tocmai necunoscutele rămase. În schimb, asupra condițiilor de tip încărcare superficială va trebui să operăm modificări similare, pentru a-l aduce la o formă în care intervin câmpurile u , v și w .

1.4 Principiu variațional

Vom demonstra în ceea ce urmează o teoremă variațională care decurge direct din modelul prezentat mai sus. Pentru aceasta, aplicăm deplasărilor u , v și w asociate stării de echilibru a corpului variații arbitrare δu , δv și δw . Vom

admite că δu , δv și δw sunt câmpuri continuu derivabile în raport cu x , y și z . De asemenea, impunem constrângerile

$$\delta u|_{\Sigma_d} = 0, \quad \delta v|_{\Sigma_d} = 0, \quad \delta w|_{\Sigma_d} = 0.$$

Acestea asigură compatibilitatea variațiilor δu , δv și δw cu setul de restricții cinematice.

Prin adunarea celor trei ecuații de echilibru Cauchy, înmulțite cu δu , δv , respectiv δw , obținem egalitatea

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \delta u + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \delta u + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta u + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \delta v + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \delta v + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \delta v \\ & + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \delta w + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \delta w + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \delta w + b_x^* \delta u + b_y^* \delta v + b_z^* \delta w = 0, \end{aligned}$$

rearanjabilă sub forma

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{zx} \delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \delta u + \sigma_y \delta v + \tau_{yz} \delta w) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} \delta u + \tau_{yz} \delta v + \sigma_z \delta w) - \sigma_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} - \sigma_y \frac{\partial \delta v}{\partial y} - \sigma_z \frac{\partial \delta w}{\partial z} \\ & - \tau_{xy} \left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) - \tau_{yz} \left(\frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) - \tau_{zx} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial z} \right) \\ & + b_x^* \delta u + b_y^* \delta v + b_z^* \delta w = 0. \end{aligned}$$

Datorită fixității domeniului Ω , pozițiile operatorilor derivată spațială și variație pot fi interschimbate. Rezultă atunci

$$\delta \varepsilon_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x}, \quad \delta \varepsilon_y = \frac{\partial \delta v}{\partial y}, \quad \delta \varepsilon_z = \frac{\partial \delta w}{\partial z},$$

$$\delta \gamma_{xy} = \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x}, \quad \delta \gamma_{yz} = \frac{\partial \delta v}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial y}, \quad \delta \gamma_{zx} = \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial z}.$$

Aceste relații definesc variații ale mărimilor ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} și γ_{zx} . Cu ajutorul acestor formule, egalitatea precedentă devine

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{zx} \delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \delta u + \sigma_y \delta v + \tau_{yz} \delta w) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} \delta u + \tau_{yz} \delta v + \sigma_z \delta w) - (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \end{aligned}$$

$$+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx}) + b_x^*\delta u + b_y^*\delta v + b_z^*\delta w = 0.$$

Vom proceda acum la integrare pe domeniul Ω . Obținem astfel

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{zx} \delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \delta u + \sigma_y \delta v + \tau_{yz} \delta w) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} \delta u + \tau_{yz} \delta v + \sigma_z \delta w) \right] d\Omega = \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \\ & + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) d\Omega - \int_{\Omega} (b_x^* \delta u + b_y^* \delta v + b_z^* \delta w) d\Omega. \end{aligned}$$

Prin aplicarea formulei flux-divergență, membrul stâng al egalității de mai sus devine

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{zx} \delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \delta u + \sigma_y \delta v + \tau_{yz} \delta w) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} \delta u + \tau_{yz} \delta v + \sigma_z \delta w) \right] d\Omega = \int_{\Sigma} [(\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{zx} \delta w) n_x + \\ & + (\tau_{xy} \delta u + \sigma_y \delta v + \tau_{yz} \delta w) n_y + (\tau_{zx} \delta u + \tau_{yz} \delta v + \sigma_z \delta w) n_z] d\Sigma = \\ & = \int_{\Sigma} [(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{zx} n_z) \delta u + (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z) \delta v + \\ & + (\tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z)] d\Sigma, \end{aligned}$$

sau, dacă luăm în considerare relațiile anterioare,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \delta u + \tau_{xy} \delta v + \tau_{zx} \delta w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \delta u + \sigma_y \delta v + \tau_{yz} \delta w) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} \delta u + \tau_{yz} \delta v + \sigma_z \delta w) \right] d\Omega = \int_{\Sigma} (s_x \delta u + s_y \delta v + s_z \delta w) d\Sigma = \\ & = \int_{\Sigma_d} (s_x \delta u + s_y \delta v + s_z \delta w) d\Sigma + \int_{\Sigma_s} (s_x \delta u + s_y \delta v + s_z \delta w) d\Sigma = \\ & = \int_{\Sigma_s} (s_x^* \delta u + s_y^* \delta v + s_z^* \delta w) d\Sigma. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) d\Omega = \\ & = \int_{\Omega} (b_x^* \delta u + b_y^* \delta v + b_z^* \delta w) d\Omega + \int_{\Sigma_s} (s_x^* \delta u + s_y^* \delta v + s_z^* \delta w) d\Sigma. \end{aligned}$$

Potrivit egalității de mai sus, în configurația de echilibru, lucrul mecanic virtual asociat solicitărilor interioare este egal cu lucrul mecanic virtual al forțelor exterioare. Întrucât la deducerea acestei proprietăți nu au fost utilizate relații constitutive, ea are o valabilitate generală, aplicându-se și corpurilor neelastice. În cazul particular când răspunsul materialului este descris de *legea lui Hooke*, se poate demonstra egalitatea

$$\begin{aligned} & \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} = \\ & = \varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx}. \end{aligned}$$

Deducem imediat

$$\begin{aligned} & \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} = \\ & = \delta \left[\frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \right]. \end{aligned}$$

Vom considera că densitățile încărcărilor exterioare \vec{b}^* și \vec{s}^* sunt independente de câmpul deplasărilor \vec{d} . Această ipoteză este rezonabilă în cazul multor corpuri care suferă deformații mici. Adoptarea sa justifică egalitățile

$$\begin{aligned} b_x^* \delta u + b_y^* \delta v + b_z^* \delta w &= \delta (b_x^* u + b_y^* v + b_z^* w), \\ s_x^* \delta u + s_y^* \delta v + s_z^* \delta w &= \delta (s_x^* u + s_y^* v + s_z^* w). \end{aligned}$$

Prin înlocuirea expresiilor integranzilor, teorema lucrului mecanic virtual devine

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta \left[\frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \right] d\Omega = \\ & \int_{\Omega} \delta (b_x^* u + b_y^* v + b_z^* w) d\Omega + \int_{\Sigma_s} \delta (s_x^* u + s_y^* v + s_z^* w) d\Sigma. \end{aligned}$$

Datorită fixității domeniului Ω și, implicit, a frontierei sale Σ , operatorul variație este deplasabil în fața integralelor. Drept consecință, relația precedentă poate fi adusă la forma tipic variațională $\delta V = 0$, în care $V = U - W$ este energia potențială elastică, definită la rândul său ca diferență între energia de deformare a corpului

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) d\Omega$$

și lucrul mecanic al încărcărilor exterioare

$$W = \int_{\Omega} (b_x^* u + b_y^* v + b_z^* w) d\Omega + \int_{\Sigma_s} (s_x^* u + s_y^* v + s_z^* w) d\Sigma.$$

Egalitatea $\delta V = 0$ arată că soluția sistemului de ecuații cu derivate parțiale staționarizează energia potențială elastică. Este demonstrabilă și reciproca acestei afirmații. Concret, se poate arăta că setul de funcții u, v, w care este compatibil cu setul de restricții cinematice și staționarizează energia potențială elastică V satisface sistemul de ecuații cu derivate parțiale care descrie echilibrul corpului. Menționăm fără demonstrație faptul că valoarea staționară a lui V este un minim. Din această cauză, egalitatea $\delta V = 0$ se mai numește și *teorema de minim a energiei potențiale elastice*.

Sunt destul de frecvente problemele de interes aplicativ, în cazul cărora principiul variațional dedus anterior oferă o cale mult mai simplă de explicitare a ecuațiilor de echilibru. Exemplul tratat în continuare este tipic pentru situațiile de acest gen.

2 Echilibrul unui fir flexibil solicitat de greutatea proprie

Ne propunem ca obiectiv determinarea configurației de echilibru a unui fir de oțel întins la orizontală și solicitat de greutatea proprie (fig. 2). Firul are următoarele caracteristici:

- lungimea $\ell = 50$ m;
- aria secțiunii transversale $A = 10^{-5}$ m² (aceeași pe toată lungimea);
- densitatea $\rho = 7850$ kg/m³;
- constantele elastice $\lambda = 1,2115 \cdot 10^{11}$ N/m² și $\mu = 0,8077 \cdot 10^{11}$ N/m².

Pentru a ne face o imagine asupra dimensiunilor secțiunii transversale, admitem că aceasta ar fi circulară de diametru d . Folosind datele de mai sus, obținem printr-un calcul simplu

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-5}}{\pi}} \approx 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ m,}$$

deci un raport lungime - diametru

$$\frac{\ell}{d} \approx \frac{50}{3,6 \cdot 10^{-3}} = 13,89 \cdot 10^3.$$

Această din urmă valoare evidențiază faptul că avem de-a face cu un fir foarte subțire. În asemenea circumstanțe, poate fi adoptată ipoteza flexibilității perfecte. Altfel spus, vom considera că firul este capabil să preia doar solicitări de întindere, fără să posede rezistență la încovoiere sau forfecare.

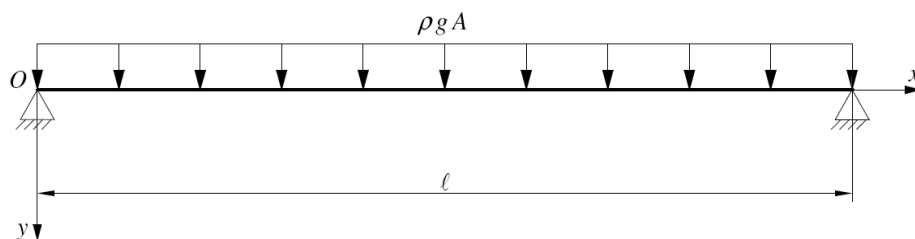


Figura 2: Fir flexibil solicitat

O a doua ipoteză simplificatoare a modelului pe care îl vom prezenta mai jos poate fi justificată evaluând masa firului:

$$m = \rho A \ell = 7850 \cdot 10^{-5} \cdot 50 = 3,925 \text{ kg.}$$

Valoarea obținută ne determină să admitem că tensiunile din fir cauzate de greutatea proprie sunt relativ mici, astfel încât și deformațiile acestuia vor fi reduse.

Pentru a descrie deformarea firului vom utiliza un sistem de coordonate carteziane a cărui origine O este amplasată la capătul din stânga, axele x și y fiind orientate așa cum se vede în figura 2. În acord cu ipoteza deformațiilor mici, vom admite valabilitatea următoarelor afirmații:

- secțiunile transversale ale firului se deplasează practic numai pe verticală (în lungul axei y – vezi figura 2);
- distorsiunile secțiunilor transversale sunt neglijabile.

În atare condiții, deplasările verticale ale particulelor aflate inițial pe axa x pot fi considerate reprezentative pentru toate celelalte particule din secțiunile transversale corespondente ale firului. Aceasta înseamnă că săgeata verticală v este funcție numai de coordonata x :

$$v = v(x), \quad x \in [0, \ell].$$

Determinarea configurației de echilibru a firului se reduce la a găsi funcția $v = v(x)$. Vom rezolva această problemă folosind teorema de minim a energiei potențiale elastice.

După cum s-a menționat anterior, datorită flexibilității perfecte, firul preia numai solicitări de întindere. În asemenea circumstanțe, singura tensiune nenulă este σ_x . Mai mult, valoarea lui σ_x poate fi considerată constantă într-o secțiune transversală a firului. Aceste observații conduc la următoarea expresie a energiei de deformare:

$$U = \frac{A}{2} \int_0^\ell \sigma_x \varepsilon_x dx.$$

În egalitatea de mai sus, ε_x reprezintă deformația longitudinală a firului. Această mărime poate fi determinată ca variație relativă a elementului de arc:

$$\varepsilon_x = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{\sqrt{1 + (v')^2} dx - dx}{dx} = \sqrt{1 + (v')^2} - 1.$$

De asemenea, σ_x este definit ca dependență de ε_x prin legea lui Hooke:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x,$$

unde

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

reprezintă modulul lui Young (caracteristică de material deductibilă din valorile constantelor lui Lamé). Cu ajutorul explicitărilor de mai sus, formula energiei de deformare devine

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^\ell \left[\sqrt{1 + (v')^2} - 1 \right]^2 dx.$$

Singura încărcare exterioară care efectuează lucru mecanic este greutatea (vezi figura 2). Această forță este repartizată uniform pe tot volumul firului, iar acțiunea sa are sensul verticalei descendente. Drept consecință, lucrul mecanic al încărcărilor exterioare este

$$W = \rho g A \int_0^\ell v dx$$

($g = 9,8 \text{ m/s}^2$ este accelerația gravitațională).

Prin înlocuirea termenilor U și W definiți ca mai sus în formula energiei potențiale elastice V , obținem

$$V = \int_0^\ell \left\{ \frac{E}{2} \left[\sqrt{1 + (v')^2} - 1 \right]^2 - \rho g v \right\} A dx$$

sau

$$V = \int_0^\ell F(v, v') dx,$$

unde

$$F(v, v') = \left\{ \frac{E}{2} \left[\sqrt{1 + (v')^2} - 1 \right]^2 - \rho g v \right\} A.$$

Dată fiind forma integrandului F , problema variațională $\delta V = 0$ generează o singură ecuație Euler și anume,

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial v'} = 0.$$

Aceasta este explicitabilă sub forma

$$v'' \left\{ 1 - [1 + (v')^2]^{-3/2} \right\} + \frac{\rho g}{E} = 0.$$

Ecuația diferențială obținută mai sus nu poate fi rezolvată pe cale analitică. Vom încerca să găsim totuși o soluție aproximativă, exploatând ipoteza micilor deformații. Într-adevăr, atât timp cât săgețile $v = v(x)$ sunt foarte reduse în comparație cu lungimea ℓ , panta firului v' are valori apropiate de zero. Drept consecință, factorul care înmulțește v'' în ecuația anterioară se pretează la o liniarizare. Vom efectua această operație considerând funcția

$$\varphi(\alpha) = 1 - (1 + \alpha)^{-3/2},$$

al cărei argument

$$\alpha = (v')^2$$

este foarte apropiat de zero. Dezvoltarea în serie Maclaurin a lui $\varphi(\alpha)$,

$$\varphi(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha - \frac{15}{8}\alpha^2 + \dots,$$

ne permite să operăm cu aproximarea liniară

$$\varphi(\alpha) \approx \frac{3}{2}\alpha$$

sau

$$1 - [1 + (v')^2]^{-3/2} \approx \frac{3}{2}(v')^2.$$

Cu ajutorul acesteia, ecuația de echilibru originală poate fi adusă la forma

$$3(v')^2 v'' + \frac{2\rho g}{E} = 0$$

sau, echivalent,

$$\frac{d}{dx} [(v')^3] + \frac{2\rho g}{E} = 0.$$

Prin integrarea acestei ultime ecuații în raport cu variabila x , obținem

$$(v')^3 = c_1 - \frac{2\rho g}{E}x,$$

unde c_1 este o constantă reală. Pentru a simplifica procedurile de calcul care urmează, vom determina chiar acum valoarea lui c_1 . Simetria geometrică și mecanică a problemei tratate (vezi figura 2) ne determină să căutăm o soluție cu proprietatea

$$v'(\ell/2) = 0.$$

Altfel spus, suntem interesați de configurațiile în care săgeata are un extrem la jumătatea lungimii firului. Impunând această condiție de simetrie, obținem

$$c_1 = \frac{\rho g \ell}{E}.$$

Rezultă astfel

$$(v')^3 = \frac{\rho g \ell}{E} \left(1 - \frac{2x}{\ell}\right),$$

adică

$$v'(x) = \begin{cases} \left[\frac{\rho g \ell}{E} \left(1 - \frac{2x}{\ell}\right)\right]^{1/3} & \text{dacă } 0 \leq x \leq \ell/2, \\ -\left[\frac{\rho g \ell}{E} \left(\frac{2x}{\ell} - 1\right)\right]^{1/3} & \text{dacă } \ell/2 < x \leq \ell. \end{cases}$$

După încă o integrare în raport cu variabila x , deducem

$$v(x) = c_2 - \frac{3\ell}{8} \left(\frac{\rho g \ell}{E}\right)^{1/3} \left|1 - \frac{2x}{\ell}\right|^{4/3}, \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

unde c_2 este o nouă constantă, pentru a cărei determinare mai este necesară o condiție la limită. Aceasta impune anularea unei săgeți de capăt (fig. 2). De exemplu, aplicând restricția $v(0) = 0$, obținem

$$c_2 = \frac{3\ell}{8} \left(\frac{\rho g \ell}{E}\right)^{1/3}.$$

Aceeași expresie a constantei c_2 ar fi rezultat și dacă s-ar fi impus anularea săgeții la capătul din dreapta $x = \ell$. Această particularitate este datorată caracteristicilor de simetrie ale soluției $v = v(x)$ în raport cu abscisa $x = \ell/2$. După înlocuirea lui c_2 definit ca mai sus, expresia săgeții devine

$$v(x) = \frac{3\ell}{8} \left(\frac{\rho g \ell}{E}\right)^{1/3} \left(1 - \left|1 - \frac{2x}{\ell}\right|^{4/3}\right), \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Odată obținută soluția $v = v(x)$, putem deduce cu ușurință formulele care descriu repartiția deformației ε_x , respectiv a tensiunii σ_x pe lungimea firului:

$$\varepsilon_x = \sqrt{1 + \left|\frac{\rho g \ell}{E} \left(1 - \frac{2x}{\ell}\right)\right|^{2/3}} - 1, \quad 0 \leq x \leq \ell,$$

$$\sigma_x = E \left[\sqrt{1 + \left| \frac{\rho g \ell}{E} \left(1 - \frac{2x}{\ell} \right) \right|^{2/3}} - 1 \right], \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Rezolvarea problemei nu poate fi considerată încheiată fără o verificare a validității ipotezelor de la care am pornit. Propriu-zis, vom admite că soluția este corectă numai după ce vom avea certitudinea că deformațiile firului sunt mici. Pentru verificarea acestui lucru, calculăm săgeata maximă:

$$\begin{aligned} v_{max} &= v(\ell/2) = \frac{3\ell}{8} \left(\frac{\rho g \ell}{E} \right)^{1/3} \\ &= \frac{3 \cdot 50}{8} \left(\frac{7850 \cdot 9,8 \cdot 50}{2,1 \cdot 10^{11}} \right)^{1/3} = 0,494 \text{ m.} \end{aligned}$$

Întrucât $v_{max} = 0,494$ m reprezintă mai puțin de un procent din lungimea firului ($\ell = 50$ m), validitatea ipotezei micilor deformații poate fi admisă fără reținere. Este interesant de observat că, potrivit formulelor deduse anterior, atât ε_x , cât și σ_x se anulează pentru $x = \ell/2$, ambele mărimi atingând valori maxime la capetele firului:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,max} &= \varepsilon_x(0) = \varepsilon_x(\ell) = \sqrt{1 + \left(\frac{\rho g \ell}{E} \right)^{2/3}} - 1 \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{7850 \cdot 9,8 \cdot 50}{2,1 \cdot 10^{11}} \right)^{2/3}} - 1 = 3,474 \cdot 10^{-4}, \\ \sigma_{x,max} &= \sigma_x(0) = \sigma_x(\ell) = E \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\rho g \ell}{E} \right)^{2/3}} - 1 \right] \\ &= 2,1 \cdot 10^{11} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{7850 \cdot 9,8 \cdot 50}{2,1 \cdot 10^{11}} \right)^{2/3}} - 1 \right] = 72,95 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2. \end{aligned}$$

Bibliografie

- [1] H. Cartan, *Calcul différentiel et formes différentielles*, Hermann, 1967.
- [2] Tr. Crețu, *Fizică generală, vol. I*, București: Editura Tehnică, 1984.
- [3] M. J. Forray, *Calculul variațional în știință și tehnică*, București: Editura Tehnică, 1975.

- [4] I. M. Ghelfand, S. V. Fomin, *Calcul variațional* (limba rusă), Izd. Fiz-Mat., 1961.
- [5] W. Kecs, *Elasticitate și viscoelasticitate*, București: Editura Tehnică, 1986.
- [6] M. Krasnov, G. I. Makarenko, A. I. Kiselev, *Problems and exercises in the calculus of variations*, Ed. Mir, 1975.
- [7] N. Lungu, *Matematici cu aplicații tehnice*, București: Editura Tehnică, 1990.
- [8] I. Gh. Șabac, *Matematici speciale, vol. I*, București: Editura Didactică și Pedagogică, 1981.
- [9] I. Gh. Șabac, P. Cocârlan, O. Stănășilă, A. Topală, A. *Matematici speciale, vol. II*, București: Editura Didactică și Pedagogică, 1983.
- [10] V. Olariu, T. Stănășilă, *Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale; probleme*, Ed. Tehnică, 1982.
- [11] N. Teodorescu, V. Olariu, *Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale*, Ed. Tehnică, 1980.
- [12] V. I. Arnold, V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt, *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [13] G. Barles, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer-Verlag, Paris, 1994.
- [14] M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 1997.
- [15] L. C. Evans, D. Gomes, *Effective Hamiltonians and averaging for Hamiltonian dynamics*, I. Arch. Ration. Mech. Anal., 157(1):1-33, 2001.
- [16] L. C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [17] L. C. Evans *Partial differential equations and Monge-Kantorovich mass transfer*, In Current developments in mathematics, 1997 (Cambridge, MA), pages 65-126. Int. Press, Boston, MA, 1999.

- [18] M. Giaquinta, *Multiple integrals in the calculus of variations and non-linear elliptic systems*, volume 105 of Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1983.
- [19] W. Oliva, *Geometric Mechanics*, IST - Lecture Notes, Lisbon, 1998.
- [20] M. Giaquinta, S. Hildebrandt, *Calculus of Variations I: The Lagrangian Formalism*, Springer, 2006.
- [21] V. V. Kozlov, *The principle of least action and periodic solutions in the problems of classical mechanics*, Prikl. Mat. Mekh. 40 (1976), 399-407 = J. Appl. Math. Mech. 40 (1976), 363-370.
- [22] A. Poincare, *Les methodes nouvelles de la mecanique celeste*, Ill, Gauthier-Villars, Paris 1956.
- [23] I. Ekeland, J. M. Lasry, *On the number of periodic trajectories for a Hamiltonian flow on a convex energy surface*, Ann. of Math. (2) 112 (1980), 283-319.
- [24] I.C. Percival, *Variational principles for the invariant toroids of classical dynamics*, J. Phys. A 7:7 (1974), 794-802.
- [25] J.N. Mather, *Concavity of the Lagrangian for quasiperiodic orbits*, Comment. Math. Helvetica 57 (1982), 356-376.
- [26] V. V. Kozlov, *Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics*, Russian Math. Surveys 38:1 (1983), 1-76.
- [27] A. Wintner, *The analytical foundations of celestial mechanics*, Princeton Math. Ser. 5, Princeton, NJ, 1941. MR 3-215.
- [28] S. V. Bolotin, V. V. Kozlov, *Libration in systems with many degrees of freedom*, J. Appl. Math. Mech. 42 (1978), 256-261.
- [29] J. Milnor, *Morse theory*, Ann. of Math. Studies 51, Princeton, NJ, 1963.
- [30] R. Palais and S. Smale, *Generalized Morse theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 165-172.
- [31] G. Arfken, *Calculus of Variations*, Ch. 17 in Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed, Orlando, FL: Academic Press, pp. 925-962, 1985.
- [32] G. A. Bliss, *Calculus of Variations*, Chicago, IL: Open Court, 1925.

- [33] A. R. Forsyth, *Calculus of Variations*, New York: Dover, 1960.
- [34] D. R. Smith, *Variational Methods in Optimization*, New York: Dover, 1998.
- [35] R. Weinstock, *Calculus of Variations, with Applications to Physics and Engineering*, New York: Dover, 1974.

Motto: "Lacăte, cine te-a închis
 La ușa marelui meu vis?
 Unde ni-i cheia, unde-i păzitorul,
 Să sfărâme zăvorul
 Și să vedem în fundul nopții noastre
 Mișcându-se comorile albastre?"

Arghezi - Descântec

CAPITOLUL 6

PROBLEME DE CALCUL VARIAȚIONAL

Subiectele întâlnite în probleme includ extremale ale funcționalelor integrale simple, extremale ale funcționalelor integrale duble, optimizarea unei funcționale integrală simplă condiționată de restricții izoperimetrice, condiții suficiente de extrem, metoda Ritz, probleme Sturm-Liouville, geodezice etc.

1 Extremale ale funcționalelor integrale simple

1. Să se determine norma funcției $x(t) = t^2 - t$ în spațiul $X = C_{[-1,1]}^1$.

Soluție. Calculăm

$$\sup_{t \in [-1,1]} |x(t)| = \max_{t \in [-1,1]} |t^2 - t| = 2$$

și $\sup |x'(t)| = \max |2t - 1| = 3$, deci $\|x\| = \max(2, 3) = 3$.

2. Fie $X = C_{[0,1]}^1$ și funcționala

$$J : X \rightarrow \mathbf{R}, \quad J(y(\cdot)) = \int_0^1 \frac{xdx}{1 + y(x)^2}.$$

a) Să se calculeze valorile lui J pentru funcțiile $y_1(x) = x$ și $y_2(x) = x^2$.

b) Să se determine valoarea extremă a lui J , folosind ecuația Euler-Lagrange.

Soluție. a)

$$J(y_1(\cdot)) = \int_0^1 \frac{xdx}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \ln 2$$

și

$$J(y_2(\cdot)) = \int_0^1 \frac{xdx}{1 + x^4} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

b) Observăm că $J(y(\cdot)) \geq 0$. În acest caz, Lagrangianul este $L = \frac{x}{1 + y^2}$

și ecuația Euler-Lagrange devine $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, adică $\frac{2xy}{(1 + y^2)^2} = 0$ și deci $y = 0$.

Curba extremală $y(x) = 0$, $x \in [0, 1]$, dă minimumul 0 al funcționalei J .

3. Fie $0 < a < b$ numere fixate. Să se determine extremalele pentru

$$J(y(\cdot)) = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

și apoi pentru

$$J_1(y(\cdot)) = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

cu condițiile $y(a) = a$, $y(b) = b$. Interpretarea geometrică.

Soluție. În ambele cazuri, folosim integrala primă a energiei totale (deoarece Lagrangianul nu depinde explicit de x):

$$y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = c \quad (\text{constant}).$$

În primul caz, $L = \sqrt{1 + y'^2}$ și $\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$. Rezultă

$$\frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - \sqrt{1 + y'^2} = c,$$

deci $y' = c$. Extremalele sunt drepte, $y(x) = cx + c_1$. Punând condițiile la capete, găsim $y = x$ (porțiunea din bisectoarea I).

În cazul secund, $L = y\sqrt{1 + y'^2}$, integrala primă a energiei totale devine

$$\frac{yy'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - y\sqrt{1 + y'^2} = c,$$

de unde $y = c\sqrt{1 + y'^2}$. Punem $y' = \text{sh } t$ deci $y = C \text{ ch } t$. Apoi

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C \text{ sh } t}{\text{sh } t} = C.$$

Așadar, $x = Ct + C_1$ și $y = C \text{ ch } t$. Aceasta este o parametrizare a curbelor integrale. Eliminând parametrul t , rezultă $y = C \text{ ch } \frac{x - C_1}{C}$. Constantele C, C_1 se determină punând condițiile la capete.

Interpretare geometrică. $J(y(\cdot))$ reprezintă lungimea arcului de curbă $y = y(x)$ care leagă punctele $A(a, a), B(b, b)$. Evident, lungimea minimă este atinsă în lungul dreptei AB .

Apoi $J_1(y(\cdot))$ este tocmai aria suprafeței de rotație în jurul axei Ox , generată de același arc de curbă; minimul acestei arii este atins de "curba lăntișor".

4. Fie $X = C^1_{[0,\pi]}$ și funcționala

$$J : X \rightarrow \mathbf{R}, \quad J(y(\cdot)) = \int_0^\pi y^2(x)(1 - y'^2(x))dx,$$

cu condițiile la capete $y(0) = 0, y(\pi) = 0$.

a) Să se determine un minim local pentru J .

b) Să se calculeze valoarea lui J pentru funcțiile $y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx, n \geq 1$ întreg. Să se arate că minimul găsit la a) nu este absolut.

Soluție. a) Avem $L = y^2(1 - y'^2)$; $\frac{\partial L}{\partial y} = 2y(1 - y'^2)$ și $\frac{\partial L}{\partial y'} = -2y^2 y'$ și ecuația Euler-Lagrange devine $2y(1 - y'^2) - \frac{d}{dx}(-2y^2 y') = 0$, adică $y(1 + y'^2 + yy'') = 0$. O soluție este $y = 0$ (porțiunea din axa $Ox, x \in [0, \pi]$). Dacă $\|y\| < 1$, adică y aparține bilei deschise cu centrul în 0 și raza 1, atunci $\forall x \in [0, \pi]$, avem $|y(x)| < 1$ și $|y'(x)| < 1$ deci $J(y(\cdot)) > 0 = J(0)$, pentru $y \neq 0$. Așadar, J are un minim local pentru $y = 0$.

b) Urmărim șirul de calcule

$$\begin{aligned} J(y_n(\cdot)) &= \int_0^\pi \frac{1}{n} \sin^2 nx(1 - n \cos^2 nx)dx = \\ &= \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^2 nxdx - \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin^2 2nxdx = \\ &\quad (\text{folosind formula } \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}) \\ &= \frac{1}{2n} \int_0^\pi (1 - \cos 2nx)dx - \frac{1}{8} \int_0^\pi (1 - \cos 4nx)dx = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Pentru $n \geq 5$, rezultă $J(y_n(\cdot)) < 0$. Deoarece există funcții din $C^1_{[0,\pi]}$ pentru care valoarea lui J este mai mică decât $J(0)$, extremala $y = 0$ nu conduce la un minim absolut.

5. Se cer extremalele posibile pentru următoarele funcționale:

a) $J(y(\cdot)) = \int_0^1 (12xy(x) - y'^2(x))dx$ cu condițiile $y(0) = 0, y(1) = 2$.

b) $J(y(\cdot)) = \int_1^2 (4xy(x) - y^2(x))dx$ cu condițiile $y(1) = 2, y(2) = \alpha$.

c) $J(y(\cdot)) = \int_0^{2\pi} (y^2(x) - y'^2(x))dx$ cu condițiile $y(0) = 2, y(2\pi) = 2$.

Soluție. a) $L = 12xy - y'^2$; $\frac{\partial L}{\partial y} = 12x$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = -2y'$ și ecuația Euler-Lagrange devine $12x + \frac{d}{dx}(2y') = 0$. Atunci $y'' = -6x$, deci $y(x) = -x^3 + Cx + C'$. Deoarece $y(0) = 0$, rezultă $C' = 0$ și cum $y(1) = 2$, găsim $C = 3$. Extremala este $y = -x^3 + 3x$.

b) $L = 4xy - y^2$; $\frac{\partial L}{\partial y} = 4x - 2y$ și $\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$. Ecuația Euler-Lagrange este $4x - 2y = 0$ sau $y = 2x$. Aceasta este acceptată dacă $\alpha = 4$, iar dacă $\alpha \neq 4$, atunci problema nu are soluție.

c) $L = y^2 - y'^2$; $\frac{\partial L}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = -2y'$ și ecuația diferențială a extremalelor este $2y + 2y'' = 0$, cu soluția generală $g(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ (C_1, C_2 constante arbitrare). Deoarece $y(0) = C_1 = 2$ și $y(2\pi) = C_1 = 2$, rezultă $y(x) = 2 \cos x + C_2 \sin x$. Deci problema are o infinitate de soluții.

6. Să se determine extremalele următoarelor funcționale cu condițiile la capete date:

$$\text{a) } J(y) = \int_1^2 (y'^2 - 2xy) dx; \quad y(1) = 0, \quad y(2) = -1;$$

$$\text{b) } J(y) = \int_1^4 (2x - y)y dx; \quad y(1) = 1, \quad y(4) = \frac{7}{2};$$

$$\text{c) } J(y) = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - y)e^{2x} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{e}.$$

$$\text{d) } J(y) = \int_0^1 (y'^2 + 4y^2) dx, \quad y(0) = e^2, \quad y(1) = 1.$$

Soluție. a) Avem $J(y) = \int_1^2 L(x, y(x), y'(x)) dx$, unde $L(x, y, y') = y'^2 - 2xy$. Cum $\frac{\partial L}{\partial y} = -2x$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = 2y'$, ecuația Euler-Lagrange devine $-2x = 2y''$, sau echivalent $y'' = -x$, de unde $y' = -\frac{x^2}{2} + C_1$, cu $C_1 \in \mathbb{R}$, și atunci $y = -\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$, cu $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Din condițiile la capete $y(1) = 0$; $y(2) = -1$, obținem sistemul

$$-\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0, \quad -\frac{4}{3} + 2C_1 + C_2 = -1,$$

care are soluția $C_1 = \frac{1}{6}$, $C_2 = 0$ și atunci $y = \frac{x}{6}(1 - x^2)$.

b) În acest caz $L(x, y, y') = (2x - y)y$, $\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + 2x$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$, iar ecuația Euler-Lagrange devine

$$-2y = 2x,$$

de unde $y = x$, care nu verifica condițiile la capete, deci funcționala nu admite extremale.

- c) Se obține $y = \frac{1}{2}[e^{-x} + (1 + e)x e^{-x} - 1]$.
- d) Se deduce $y = e^{2(1-x)}$.

7. Să se arate că funcționala $J(y(\cdot)) = \int_0^1 y(x)y'^2(x)dx$ are două curbe extremale distincte care trec prin punctele $A(0, 1)$ și $B(1, \sqrt[3]{4})$.

Soluție. Aici $L = yy'^2$; $\frac{\partial L}{\partial y} = y'^2$ și $\frac{\partial L}{\partial y'} = 2yy'$. Ecuația Euler-Lagrange este $y'^2 - \frac{d}{dx}(2yy') = 0$ sau $y'^2 + 2yy'' = 0$. Atunci $\frac{y'}{y} = -\frac{y''}{y'}$ și prin integrare, $\ln|y| = -2\ln|y'| + \ln C$ deci $y = \frac{C}{y'^2}$. Așadar $y'\sqrt{y} = C$, deci $\frac{2}{3}y^{3/2} = Cx + C_1$, adică $y = (Cx + C_1)^{2/3}$. Pentru $x = 0$, rezultă $C_1^{2/3} = 1$, deci $C_1 = \pm 1$. În final, se obțin două extremale: $y = (x + 1)^{2/3}$ și $y = (3x - 1)^{2/3}$.

8. Să se determine, prin trecere la coordonate polare, extremalele funcționalei

$$J(y(\cdot)) = \int_a^b \sqrt{x^2 + y^2(x)} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

Soluție. Punând $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $\rho = \rho(\theta)$, rezultă

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\rho' \sin \theta + \rho \cos \theta}{\rho' \cos \theta - \rho \sin \theta}$$

și $\sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$. Ca atare, $J(y) = \int_{\frac{\theta - C_1}{C}}^{\beta} \rho \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$. Folosind problema 3, extremalele au ecuațiile $\rho = C \operatorname{ch} \frac{\theta - C_1}{C}$, în coordonate polare.

9. Să se arate că există o infinitate de curbe extremale pentru funcționala

$$J(y(\cdot)) = \int_0^\pi (4y \cos x + y'^2(x) - y^2(x)) dx,$$

care unesc punctele $A(0, 0)$ și $B(\pi, 0)$.

Soluție. Avem $L = 4y \cos x + y'^2 - y^2$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 4 \cos x - 2y$ și $\frac{\partial L}{\partial y'} = 2y'$ deci ecuația Euler-Lagrange devine $y'' + y = 2 \cos x$. Soluția generală

a acestei ecuații diferențiale este $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + y_p(x)$, unde C_1, C_2 sunt constante arbitrare și $y_p(x)$ este o soluție particulară, de exemplu $y_p(x) = x \sin x$. Soluția generală este $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x$. Dar $y(0) = C_1 = 0$ și $y(\pi) = -C_1$ deci C_2 rămâne și ca atare, avem o familie de extremale: $y = (x + C_2) \sin x$.

10. Să se rezolve problema brahisticronei ("a derdelușului").

Soluție. Aceasta revine la a minimiza funcționala

$$J(y(\cdot)) = \int_0^c \frac{\sqrt{1 + y'(x)^2}}{\sqrt{y(x)}} dx,$$

cu condițiile $y(0) = 0$, $y(c) = d$. Aici

$$L = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y\sqrt{y}}, \quad \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Integrala primă a energiei totale, $L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = C$, devine

$$\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - y' \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C,$$

deci $1 = C\sqrt{y} \sqrt{1 + y'^2}$, adică $y = \frac{C}{1 + y'^2}$. Punând $y' = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}$, rezultă

$$y = C \sin^2 \frac{t}{2} = \frac{C}{2}(1 - \cos t),$$

de unde

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C \sin t dt}{2 \operatorname{ctg} \frac{t}{2}} = C \sin^2 \frac{t}{2} dt = \frac{C}{2}(1 - \cos t) dt.$$

Așadar, ecuațiile parametrice ale curbelor extremale sunt $x = \frac{C}{2}(t - \sin t) + C'$, $y = \frac{C}{2}(1 - \cos t)$. Recunoaștem aici o familie de *cicloide*. Constantele C, C' se determină punând condițiile de trecere prin punctele A și B .

11. Să se determine forma unei funcții crescătoare $y = y(x)$ de clasă $C_{[0,b]}^2$ cu $y(0) = 0$, pentru care corpul de rotație generat în jurul lui Ox să întâmpine o rezistență minimă la deplasarea contra unui flux de gaz.

Soluție. Presupunem că densitatea ρ a gazului este suficient de mică și că moleculele lui se reflectă de suprafața corpului. Notând cu v viteza relativă a gazului și cu θ unghiul dintre viteză și componenta tangențială, rezultă componenta normală a presiunii $p = 2\rho v^2 \cdot \sin^2 \theta$.

Presiunea fiind perpendiculară pe suprafață, componenta forței care acționează în lungul semiaxe Ox pe un inel de lățime $(1 + y'^2)^{1/2} dx$ și raza $y(x)$ va fi

$$dF = 2\rho v^2 \sin^2 \theta \cdot 2\pi y(1 + y'^2)^{1/2} \sin \theta dx.$$

Forța totală care acționează în direcția Ox va fi

$$F = \int_0^l 4\rho \pi v^2 \sin^3 \theta y(1 + y'^2(x))^{1/2} dx.$$

Presupunând $\sin \theta \simeq \frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}}$ și că $1 + y'^2 \simeq 1$, rezultă că

$$F = K \int_0^l y(x) y'^3(x) dx,$$

cu condițiile la capete $y(0) = 0$, $y(l) = R$. Lagrangianul este $L = K \cdot y \cdot y'^3$ ($K > 0$ fiind o constantă); atunci $\frac{\partial L}{\partial y} = Ky'^3$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = 3Kyy'^2$ și folosim integrala primă a energiei totale, $L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = C$. Rezultă $yy'^3 = C$, de unde $y' \cdot y^{1/3} = C$ și integrând, $y(x) = (Cx + C_1)^{3/4}$, cu C, C_1 constante. Deoarece $y(0) = 0$, rezultă $C_1 = 0$ și în final, $C = R^{4/3} l^{-1}$. Ecuația profilului optim căutat este, cu aproximație, $y(x) = R l^{-3/4} \sqrt[4]{x^3}$. Recunoaștem o formă de parabolă.

12 (Problema lui Newton). Să se determine profilul unui corp de rotație în jurul axei Ox (verticale), care se deplasează în jos, cu viteza v , într-un mediu omogen poros.

Soluție. Elementul dr descrie în jurul axei Ox o coroană de arie

$$d\sigma = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 \simeq 2\pi r dr.$$

Acestei coroane îi corespunde pe suprafața corpului rotit o centură de arie dV . În intervalul de timp dt , această centură va genera un volum $vD = 2\pi r dr v dt$. Dacă ρ este densitatea mediului, atunci numărul particulelor care întâlnesc centura este $N = \frac{\rho}{m} dV = 2\pi r dr v (\rho/m) dt$.

Estimăm acum forța dF care acționează asupra centurii $d\Sigma$ în timpul dt . Fie φ unghiul dintre elementul de arc ds și axa Or deci $\operatorname{tg}\varphi \simeq \frac{dx}{dr}$. Componenta pe Ox a creșterii impulsului va fi

$$N \cdot 2mv \cdot \cos^2 \varphi = 4\pi\rho \cdot v^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot r dr \cdot dt$$

și conform legii a II-a a lui Newton, aceasta este egală cu $dF \cdot dt$, de unde rezultă că

$$dF = K \cdot r \cdot dr \cdot \cos^2 \varphi = \frac{K \cdot r \cdot dr}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

unde $K = 4\pi\rho \cdot v^2$ este o constantă. Forța totală de rezistență, care trebuie minimizată, este

$$F = K \int_0^R \frac{r dr}{1 + \dot{x}(r)^2}$$

și astfel, problema revine, cu aproximație, la a determina extremalele funcționalei

$$J(x(t)) = \int_0^R \frac{t dt}{1 + \dot{x}(t)^2},$$

cu condițiile $x(0) = 0$, $x(R) = \text{dat}$.

Legendre a arătat că trebuie adăugată condiția ca $\dot{x}(t) > 0$ (căci altminteri, s-ar putea considera un profil "zimțat", unde $\dot{x}(r)$ poate fi "foarte mare", iar valorile lui J vor fi "foarte mici". Nu se poate aplica direct ecuația Euler-Lagrange, dar se poate folosi principiul de minim al lui Pontryaguin: punând $\dot{x}(t) = u$, $u \geq 0$, se formează Lagrangianul $L = \mu_0 \cdot \frac{t}{1 + u^2} + p(t)(\dot{x} - u)$. Cum $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ și $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p(t)$, rezultă din ecuația Euler-Lagrange că $p(t) = p_0$, constant. Dacă (\hat{x}, \hat{u}) este un proces optimal, atunci

$$\mu_0 \frac{t}{1 + u^2} + p_0(\hat{x} - u) \geq \mu_0 \frac{t}{1 + \hat{u}(t)^2} + p_0(\hat{x} - \hat{u}(t)),$$

deci

$$\frac{\mu_0 t}{1 + u^2} - p_0 u \geq \frac{\mu_0 t}{1 + \hat{u}(t)^2} - p_0 \hat{u}(t).$$

Nu mai dăm detalii.

Problema lui Newton este încă în studiu, fiind importantă la înțelegerea mișcărilor supersonice.

13. Să se determine extremalele următoarelor funcționale în condițiile specificate:

- a) $J(y(\cdot)) = \int_0^\pi (y''^2 - y'^2 - 12xy)dx;$
 $y(0) = y'(0) = 0, y(\pi) = \pi^3, y'(\pi) = 3\pi^2;$
 b) $J(y(\cdot)) = \int_0^1 (y''^2 + 2y'^2 + y^2 - ax^2)dx, a \in R;$
 $y(0) = y'(0) = 0, y(1) = y'(1) = 2;$
 c) $J(y(\cdot)) = \int_a^b (y''^2 + x^2y' - y^2)dx;$
 d) $J(y(\cdot)) = \int_a^b (y''^2 + 2y''^2 + y'^2 + 12xy)dx.$

Soluție. a) Avem $J(y(\cdot)) = \int_0^\pi L(x, y(x), y'(x), y''(x))dx,$ unde

$$L(x, y, y', y'') = y''^2 - y'^2 - 12xy.$$

Scriem ecuația Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) = 0.$$

Cum $\frac{\partial L}{\partial y} = -12x, \frac{\partial L}{\partial y'} = -2y', \frac{\partial L}{\partial y''} = 2y'',$ ecuația Euler-Lagrange devine

$$y^{iv} + y'' = 6x,$$

cu soluția generală $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x + C_4 + x^3, C_1, C_2, C_3, C_4 \in R.$

Din condițiile la capete $y(0) = y'(0) = 0, y(\pi) = \pi^3, y'(\pi) = 3\pi^2$ obținem sistemul

$$C_1 + C_4 = 0, C_2 + C_3 = 0, -C_1 + C_3\pi + C_4 = 0, -C_2\pi + C_3 = 0,$$

care are soluția $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0,$ și atunci $y = x^3.$

b) În acest caz $L(x, y, y', y'') = y''^2 + 2y'^2 + y^2 - ax^2, \frac{\partial L}{\partial y} = 2y, \frac{\partial L}{\partial y'} = 4y', \frac{\partial L}{\partial y''} = 2y'',$ iar ecuația Euler-Lagrange devine

$$y^{IV} - 2y'' + y = 0,$$

cu soluția generală $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}, C_1, C_2, C_3, C_4 = \text{const.}$ Din condițiile la capete $y(0) = y'(0) = 0, y(1) = y'(1) = 2$ obținem sistemul

$$C_1 + C_3 = 0, C_1 + C_2 - C_3 + C_4 = 0, \\ C_1 e + C_2 e + \frac{C_3}{e} + \frac{C_4}{e} = 2, C_1 e + 2C_2 e - \frac{C_3}{e} = 2,$$

din care se determină constantele $C_1, C_2, C_3, C_4.$

c) $L(x, y, y', y'') = y''^2 + x^2y' - y^2, \frac{\partial L}{\partial y} = -2y, \frac{\partial L}{\partial y'} = x^2, \frac{\partial L}{\partial y''} = 2y'',$ iar ecuația Euler-Lagrange devine

$$y^{iv} - y = x,$$

cu soluția generală $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - x$, $C_1, C_2, C_3, C_4 = \text{const.}$

d) $J(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x)) dx$, unde
 $L(x, y, y', y'', y''') = y'''^2 + 2y''^2 + y'^2 + 12xy$.

În acest caz ecuația Euler-Lagrange se scrie astfel

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{\partial L}{\partial y'''} \right) = 0.$$

Cum $\frac{\partial L}{\partial y} = 12x$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = 2y'$, $\frac{\partial L}{\partial y''} = 4y''$, $\frac{\partial L}{\partial y'''} = 2y'''$ ecuația Euler-Lagrange devine

$$y^{vi} - 2y^{IV} + y'' = 12x,$$

cu soluția generală

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + C_5 x + C_6,$$

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 = \text{const.}$

14. Să se determine curba extremală a funcționalei

$$J(x(\cdot)) = \int_0^1 (\dot{x}_1(t)^2 + 2x_2(t) + \dot{x}_2(t)^2) dt,$$

ce satisface condițiile $x_1(0) = 1$, $x_1(1) = 2$, $x_2(0) = 1$, $x_2(1) = 0$.

Soluție. Aici $L = \dot{x}_1^2 + 2x_2 + \dot{x}_2^2$, $\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 2\dot{x}_1$, $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 2\dot{x}_2$ și sistemul diferențial Euler-Lagrange devine: $\ddot{x}_1 = 0$, $\ddot{x}_2 = 1$, de unde $x_1(t) = C_1 t + C_2$, $x_2(t) = \frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$. Punând condițiile la capete, rezultă curba: $x_1(t) = t + 1$; $x_2(t) = \frac{1}{2}(t^2 - 3t) + 1$.

15. Aceeași problemă pentru

$$J(x_1(\cdot), x_2(\cdot)) = \int_0^\pi (2x_2(t) - 4x_1^2(t) + \dot{x}_1^2(t) - \dot{x}_2^2(t)) dt,$$

cu condițiile $x_1(0) = 0$, $x_1(\pi) = 0$, $x_2(0) = 0$ și $x_2(\pi) = -\pi^2$.

Soluție. $L = 2x_2 - 4x_1^2 + \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2$, $\frac{\partial L}{\partial x_1} = -8x_1$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 2\dot{x}_1$, $\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = -2\dot{x}_2$ și sistemul Euler-Lagrange este: $-8x_1 - \frac{d}{dt}(2\dot{x}_1) = 0$, $2 -$

$\frac{d}{dt}(-2\dot{x}_2) = 0$, adică $\ddot{x}_1 + 4x_1 = 0$, $\ddot{x}_2 + 1 = 0$. Găsim $x_1 = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$,
 $x_2 = -\frac{t^2}{2} + C_3 t + C_4$. Rezultă $C_1 = 0$, C_2 nedeterminat, $C_4 = 0$ și $C_3 = -\frac{\pi}{2}$.
 Avem o infinitate de extremale: $x_1 = C_2 \sin 2t$, $x_2 = -\frac{1}{2}(t^2 + \pi t)$.

16. Să se determine curbele extremale, în \mathbf{R}^2 , ale funcționalei

$$J(y(\cdot), z(\cdot)) = \int_a^b (z'^2(x) - y'^2(x) + 4y^2(x) - 2z(x))dx.$$

Soluție. Aici $L = z'^2 - y'^2 + 4y^2 - 2z$ și sistemul Euler-Lagrange este

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial z'} \right) = 0.$$

Dar $\frac{\partial L}{\partial y} = 8y$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = -2y'$, $\frac{\partial L}{\partial z} = -2$ și $\frac{\partial L}{\partial z'} = 2z'$ deci $y'' + 4y = 0$, $z'' + z = 0$.
 Deducem $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$, $z(x) = C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

17. Să se determine curbele extremale, în \mathbf{R}^n , ale funcționalei

$$J(x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)) = \int_a^b t^2(\dot{x}_1^2(t) + \dots + \dot{x}_n^2(t) - x_1^2(t) - \dots - x_n^2(t))dt.$$

Soluție. Lagrangianul este $L = t^2(\dot{x}_1^2 + \dots + \dot{x}_n^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2)$ deci

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = -2t^2 x_k, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = 2t^2 \dot{x}_k$$

și sistemul Euler-Lagrange devine $-2t^2 x_k - \frac{d}{dt}(2t^2 \dot{x}_k) = 0$, $1 \leq k \leq n$. Așadar,
 $t\ddot{x}_k + 2\dot{x}_k + tx_k = 0$. Notăm $tx_k = y_k$ și derivând în raport cu t , rezultă
 $x_k + t\dot{x}_k = \dot{y}_k$, $2\dot{x}_k + t\ddot{x}_k = \ddot{y}_k$ și rezultă $\ddot{y}_k + y_k = 0$ deci $y_k = C_{k1} \cos t + C_{k2} \sin t$,
 $1 \leq k \leq n$. În final $x_k = \frac{1}{t}(C_{k1} \cos t + C_{k2} \sin t)$, $1 \leq k \leq n$.

18. Să se determine extremalele următoarelor funcționale:

a) $J(y, z) = \int_1^2 (y'^2 + z^2 + z'^2)dx$; $y(1) = 1, z(1) = 0, y(2) = 2, z(2) = 1$;

b) $J(y, z) = \int_0^1 (a^2 + y')(b^2 + z')dx$; $a, b \in \mathbf{R}, y(0) = z(0) = 2, y(1) = z(1) = 3$;

c) $J(y, z) = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 + 2yz' + 2y'z + 12xy + 12xz)dx$; $y(0) = -1, z(0) = 0, y(1) = 0, z(1) = 2$;

$$d) J(y, z) = \int_1^2 (x^2 y'^2 + x^2 z'^2 + 2y^2 + 6z^2 + 2xy + 2xz) dx; y(1) = 1, z(1) = 0, y(2) = 2(1 + \frac{1}{3} \ln 2), z(2) = \frac{1}{2}.$$

$$e) J(x, y, z) = \int_0^1 (ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + (ax' + by' + cz')(ax + by + cz)) dt, \\ a, b, c \in R^*; x(0) = y(0) = z(0) = 1, x(1) = y(1) = z(1) = 2;$$

Soluție. a) Avem $J(y, z) = \int_1^2 F(x, y(x), z(x), y'(x), z'(x)) dx$, unde

$$F(x, y, z, y', z') = y'^2 + z^2 + z'^2.$$

Scriem sistemul Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right), \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial z'} \right).$$

Cum $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = 2y'$, $\frac{\partial L}{\partial z} = 2z$, $\frac{\partial L}{\partial z'} = 2z'$, sistemul Euler-Lagrange devine

$$0 = 2y'', \quad 2z = 2z'',$$

cu soluția generală $y = C_1 x + C_2$, $z = C_3 e^x + C_4 e^{-x}$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in R$. Din condițiile la capete găsim $C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = \frac{1}{e^2 - 1}, C_4 = -\frac{e^2}{e^2 - 1}$ și atunci $y = x, z = \frac{1}{e^2 - 1}(e^x - e^{2-x})$.

b) $L(x, y, z, y', z') = (a^2 + y')(b^2 + z')$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = b^2 + z'$, $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial z'} = a^2 + y'$, iar sistemul Euler-Lagrange devine

$$0 = z'', \quad 0 = y'',$$

cu soluția generală $y = C_1 x + C_2, z = C_3 x + C_4$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in R$. Din condițiile la capete găsim $C_1 = 1, C_2 = 2, C_3 = 1, C_4 = 2$, și atunci $y = x + 2, z = x + 2$.

c) Sistemul Euler-Lagrange se reduce la

$$y'' = 6x, \quad z'' = 6x,$$

care conduce la soluția $y = x^3 - 1, z = x^3 + x$.

d) În acest caz sistemul Euler-Lagrange conduce la

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = x, \quad x^2 z'' + 2xz' - 6z = x,$$

și folosind schimbarea de variabila $x = e^t$ vom obține soluția

$$y = x(1 + \frac{1}{3} \ln x), \quad z = \frac{1}{4} x(x - 1).$$

e) În acest caz $J(x, y, z) = \int_1^2 L(t, x(t), y(t), z(t), x'(t), y'(t), z'(t))dt$, unde

$$L(t, x, y, z, x'y', z') = ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + (ax' + by' + cz')(ax + by + cz),$$

iar sistemul Euler-Lagrange, in acest caz, se scrie astfel

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right), \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right), \quad \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial z'} \right).$$

Cum

$$\frac{\partial L}{\partial x} = a(ax' + by' + cz'), \quad \frac{\partial L}{\partial x'} = 2ax' + a(ax + by + cz),$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = b(ax' + by' + cz'), \quad \frac{\partial L}{\partial y'} = 2by' + b(ax + by + cz),$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = c(ax' + by' + cz'), \quad \frac{\partial L}{\partial z'} = 2cz' + c(ax + by + cz),$$

sistemul Euler-Lagrange devine $x'' = y'' = z'' = 0$, cu soluția

$x = C_1t + C_2, y = C_3t + C_4, z = C_5t + C_6, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 \in R$. Din condițiile la capete $x(0) = y(0) = z(0) = 1, x(1) = y(1) = z(1) = 2$, găsim $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = 1$, de unde deducem extremala funcționalei: $x = t + 1, y = t + 1, z = t + 1$.

19. Să se determine curba plana închisă care are o lungime dată și mărginește un domeniu de arie maximă.

Soluție. Avem de aflat extremalele funcționalei

$$J(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} ydx - xdy = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} (yx' - xy')dt$$

care satisfac condiția

$$\int_{\gamma} ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = l,$$

unde $x = x(t), y = y(t), t \in [t_0, t_1]$ sunt ecuațiile parametrice ale curbei închise γ (au loc evident $x(t_0) = x(t_1), y(t_0) = y(t_1)$). Considerăm funcționala $J + \lambda G$, al carei lagrangean este

$$L(t, x, y, x', y') = \frac{1}{2}(yx' - xy') + \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

Sistemul Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial x'} \right), \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right)$$

se poate scrie sub forma

$$x' = \frac{1}{2\lambda}(c_1 - y)\sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad y' = \frac{1}{2\lambda}(c_2 + x)\sqrt{x'^2 + y'^2},$$

de unde rezultă $\frac{dy}{dx} = \frac{c_2+x}{c_1-y}$. Extremalele vor fi cercurile

$$(x + c_2)^2 + (y - c_1)^2 = c_3^2, \text{ de rază } c_3 = \frac{l}{2\pi}.$$

2 Extremale ale funcționalelor integrale duble

20. Se cer suprafețele extremale ale funcționalei

$$J(z(\cdot)) = \iint_D L(x, y, z, z_x, z_y) dx dy,$$

unde $D \subset \mathbf{R}^2$ este o mulțime măsurabilă mărginită, cu frontiera o curbă închisă jordaniană, iar L este o funcție de clasă C^3 pe un deschis din \mathbf{R}^5 ($z_x \equiv \frac{\partial z}{\partial x}$, $z_y \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$). Caz particular: $L = z_x^2 + z_y^2$.

Soluție. Ecuația Euler-Lagrange-Gauss este

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial z_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial z_y} \right) = 0.$$

În cazul particular, $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial z_x} = 2z_x$ și $\frac{\partial L}{\partial z_y} = 2z_y$ deci extremalele cerute sunt soluții ale ecuației $\frac{\partial}{\partial x}(z_x) + \frac{\partial}{\partial y}(z_y) = 0$, adică $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ deci funcțiile armonice $z = z(x, y)$ în $\overset{\circ}{D}$.

21. Aceeași problemă pentru

$$J(z(\cdot)) = \iint_D (z_x^2 + z_y^2 + 2z_x z_y) dx dy$$

și pentru

$$J(u(\cdot)) = \iiint_V (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + 6u) dx dy dz.$$

Soluție. În primul caz, se obține $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$. În cazul secund, rezultă $\Delta u = 3$.

22. Să se scrie ecuația Laplace $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ în coordonate polare, folosind ecuația Euler-Lagrange.

Soluție. Am văzut la problema **20** că ecuația Laplace este tocmai ecuația extremalelor funcționalei

$$J(z(\cdot)) = \iint_D (z_x^2 + z_y^2) dx dy.$$

Trecând la coordonate polare $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, avem

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}$$

deci

$$\begin{aligned} J(z(\cdot)) &= \iint_{D'} \left[\left(z_r \frac{\partial r}{\partial x} + z_\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(z_r \frac{\partial r}{\partial y} + z_\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2 \right] r dr d\theta \\ &= \iint_{D'} \left(r z_r^2 + \frac{1}{r} z_\theta^2 \right) dr d\theta \end{aligned}$$

și noua ecuație Euler-Lagrange-Gauss este

$$\frac{1}{r} z_{\theta\theta} + r z_{rr} + z_r = 0.$$

23. Să se scrie ecuația suprafețelor minimale.

Soluție. Dintre toate suprafețele $S : z = f(x, y)$ cu $(x, y) \in D$ și frontiera lui D o curbă închisă jordaniană, care este proiecția unei curbe închise situate pe S , se numește *suprafață minimală* cea pentru care aria

$$J(f(\cdot)) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

este minimă. Ecuația Euler-Lagrange devine

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \right) = 0.$$

Această ecuație cu derivate parțiale nu poate fi rezolvată explicit decât în cazuri speciale.

Notă. O suprafață minimală modelează un "film de săpun" peste un contur de sârmă.

24 (a) Considerăm spațiile Riemanniene $(R^2, h^{11} = h^{22} = 1, h^{12} = h^{21} = 0)$, $(R, g = 1)$ și sistemul de EDP $u_t = u$, $u_x = -u$. Construiți Lagrangianul celor mai mici pătrate și ecuația Euler-Lagrange corespunzătoare.

Soluție. Acesta este un sistem complet integrabil cu soluția $u(t, x) = e^{t-x}$. Notând $X_1(u) = u$, $X_2(u) = -u$, rezultă Lagrangianul

$$L = \frac{1}{2}(u_t - X_1(u))^2 + \frac{1}{2}(u_x - X_2(u))^2$$

și ecuația Euler-Lagrange

$$u_{tt} + u_{xx} = 2u.$$

Această ecuație Poisson are cel puțin două soluții: $u(t, x) = e^{t-x}$ și $u(t, x) = e^{t+x}$.

(b) Considerăm spațiul hiperbolic $(R^2, h^{11} = 1, h^{22} = -1, h^{12} = h^{21} = 0)$ și spațiul Riemannian $(R, g = 1)$. Sistemul de EDP $u_t = u^2$, $u_x = u$ nu este complet integrabil. Construiți "Lagrangianul celor mai mici pătrate" și ecuația Euler-Lagrange corespunzătoare.

Soluție. Notând $X_1(u) = u^2$, $X_2(u) = u$, rezultă Lagrangianul

$$L = \frac{1}{2}(u_t - X_1(u))^2 - \frac{1}{2}(u_x - X_2(u))^2$$

și ecuația Euler-Lagrange

$$u_{tt} - u_{xx} = u(2u^2 - 1).$$

Această ecuație admite soluțiile de tip *undă solitară*

$$u(t, x) = \operatorname{sech}(x \cosh \theta + t \sinh \theta)$$

parametrizate după $\theta \in R$.

(c) Considerăm spațiul hiperbolic $(R^2, h^{11} = h^{22} = 0, h^{12} = h^{21} = 1)$ și spațiul Riemannian $(R, g = 1)$. Sistemul de EDP $u_t = 2\sin \frac{u}{2}$, $u_x = 2\sin \frac{u}{2}$ este complet integrabil dacă și numai dacă funcția u este soluția ecuației sine-Gordon $u_{tx} = \sin u$. Notând $X_1(u) = 2\sin \frac{u}{2}$, $X_2(u) = 2\sin \frac{u}{2}$, rezultă Lagrangianul

$$L = (u_t - X_1(u))(u_x - X_2(u))$$

și ecuația Euler-Lagrange este chiar ecuația sine-Gordon.

25. Să se determine extremalele funcționalelor

a) $J(u(\cdot)) = \iint_D [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - 9(\frac{\partial u}{\partial y})^2] dx dy$, unde $D \subset R^2$ este un domeniu

simplu conex și mărginit.

b) $J(u(\cdot)) = \iint_D [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - 4(\frac{\partial u}{\partial y})^2 - 64(2x+y)u] dx dy$, unde $D \subset R^2$ este un

simplu conex și mărginit.

c) $J(u(\cdot)) = \iint_D [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - 16x^2(\frac{\partial u}{\partial y})^2] dx dy$, unde $D \subset R^2$ este un domeniu

simplu conex și mărginit.

d) $J(u(\cdot)) = \iint_D [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2 - 2\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}] dx dy$, unde $D \subset R^2$ este un domeniu simplu conex și mărginit.

Soluție. a) $J(u(\cdot)) = \iint_D L(x, y, u, u_x, u_y) dx dy$, unde

$$L(x, y, u, u_x, u_y) = (\frac{\partial u}{\partial x})^2 - 9(\frac{\partial u}{\partial y})^2.$$

Ecuția Euler-Lagrange-Gauss se scrie astfel

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial L}{\partial u_y} \right) = 0.$$

Cum $\frac{\partial L}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial u_x} = 2u_x$, $\frac{\partial L}{\partial u_y} = -18u_y$, ecuația Euler-Lagrange-Gauss devine

$$u_{xx} - 18u_{yy} = 0.$$

Am ajuns astfel la o ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea. Efectuăm schimbarea de variabile $s = 3x + y$, $t = 3x - y$, de unde rezultă $x = \frac{1}{6}(s + t)$, $y = \frac{1}{2}(s - t)$. Fie

$$\tilde{u}(s, t) = u \left(\frac{1}{6}(s + t), \frac{1}{2}(s - t) \right),$$

deci $\tilde{u}(3x+y, 3x-y) = u(x, y)$. Astfel, ecuația Euler-Lagrange-Gauss se reduce la $\partial^2 \tilde{u} / \partial s \partial t = 0$, de unde $\tilde{u}(s, t) = f(t) + g(s)$, cu $f, g \in C^2(R)$ și atunci

$$u(x, y) = f(3x - y) + g(3x + y).$$

$$\text{b) } J(u(\cdot)) = \iint_D L(x, y, u, u_x, u_y) dx dy, \text{ unde}$$

$$L(x, y, u, u_x, u_y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 4\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 64(2x + y)u.$$

Cum $\frac{\partial L}{\partial u} = -64(2x + y)$, $\frac{\partial L}{\partial u_x} = 2u_x$, $\frac{\partial L}{\partial u_y} = -8u_y$, ecuația Euler-Lagrange-Gauss conduce la

$$u_{xx} + 4u_{yy} = 16(2x + y).$$

Efectuând schimbarea de variabile $s = y + 2x$, $t = y - 2x$ și urmând calculele ca la exercițiul anterior vom obține $u(x, y) = f(y + 2x) + g(y - 2x) + (y + 2x)^2 + (y - 2x)^2$, cu $f, g \in C^2(\mathbb{R})$.

$$\text{c) } J(u(\cdot)) = \iint_D L(x, y, u, u_x, u_y) dx dy, \text{ unde}$$

$$L(x, y, u, u_x, u_y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 16x^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Cum $\frac{\partial L}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial u_x} = 2u_x$, $\frac{\partial L}{\partial u_y} = -32x^2u_y$, ecuația Euler-Lagrange-Gauss devine

$$u_{xx} - 16x^2u_{yy} = 0,$$

cu soluția $u(x, y) = xf(y + 2x^2) + g(y - 2x^2)$, unde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$.

$$\text{d) } J(u(\cdot)) = \iint_D L(x, y, u, u_x, u_y) dx dy, \text{ unde}$$

$$L(x, y, u, u_x, u_y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Cum $\frac{\partial L}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial u_x} = 2u_x - 2u_y$, $\frac{\partial L}{\partial u_y} = 2u_y - 2u_x$, ecuația Euler-Lagrange-Gauss este

$$u_{xx} + u_{yy} - 2u_{xy} = 0,$$

cu soluția $u(x, y) = xf(x + y) + g(x + y)$, unde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$.

3 Optimizarea unei funcționale integrale simplă condiționată de restricții izoperimetrice

26. Să se determine extremalele funcționalei

$$J_0(x(\cdot)) = \int_0^1 \dot{x}(t)^2 dt$$

cu legătura $\int_0^1 x(t)dt = 3$, $x(0) = 1$ și $x(1) = 6$.

Soluție. Considerăm Lagrangianul $L = \lambda \dot{x}(t)^2 + \lambda' x(t)$ și calculăm $\frac{\partial L}{\partial x} = \lambda'$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2\lambda \dot{x}$. Scriem ecuația Euler-Lagrange: $\lambda' - \frac{d}{dt}(2\lambda \dot{x}) = 0$, deci $2\lambda \ddot{x} - \lambda' = 0$, cu $\lambda \neq 0$. Notând $k = \frac{\lambda'}{2\lambda}$, rezultă $\ddot{x} = k$, deci $\dot{x} = kt + C_1$ și $x = k \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$. Cum $x(0) = 1$, găsim $C_2 = 1$; apoi $\frac{k}{2} + C_1 + C_2 = 6$, deci $C_1 = 5 - \frac{k}{2}$ și $x(t) = k \cdot \frac{t^2}{2} + \left(5 - \frac{k}{2}\right)t + 1$. Constanta k se determină din condiția $\int_0^1 x(t)dt = 3$. Rezultă $k = 6$ și $x(t) = 3t^2 + 2t + 1$.

27. Aceeași problemă pentru funcționala

$$J_0(x(\cdot)) = \int_0^\pi \dot{x}(t)^2 dt,$$

cu legătura $\int_0^\pi x(t)^2 dt = 1$, $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$.

Soluție. Considerăm $L = \lambda \dot{x}^2 + \lambda' x^2$ și ecuația Euler-Lagrange este $2\lambda' x - \frac{d}{dt}(2\lambda \dot{x}) = 0$, adică $\lambda \ddot{x} - \lambda' x = 0$. Cum $\lambda \neq 0$ (căci $x = 0$ nu este soluție acceptabilă), notăm $k = \frac{\lambda'}{\lambda}$ și deducem $\ddot{x} - kx = 0$. Dacă $k > 0$, rezultă $x(t) = C_1 e^{t\sqrt{k}} + C_2 e^{-t\sqrt{k}}$. Cum $x(0) = C_1 + C_2 = 0$ și $x(\pi) = C_1 e^{\pi\sqrt{k}} + C_2 e^{-\pi\sqrt{k}} = 0$, rezultă $C_1 = C_2 = 0$ deci $x \equiv 0$, exclus. Dacă $k = 0$, atunci $x(t) = C_1 t + C_2$ și din condițiile $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$, rezultă din nou $x \equiv 0$. Rămâne $k < 0$ deci $x(t) = C_1 \cos(t\sqrt{-k}) + C_2 \sin(t\sqrt{-k})$. Dar $x(0) = C_1 = 0$ deci $x(t) = C_2 \sin(t\sqrt{-k})$ și cum $x(\pi) = 0$, rezultă $C_2 \sin(\pi\sqrt{-k}) = 0$. Cum $C_2 \neq 0$ (căci altminteri, din nou ar rezulta $x \equiv 0$), se obține $\sin \pi\sqrt{-k} = 0$, de unde $\pi\sqrt{-k} = l\pi$ și $k = -l^2$, $l \neq 0$. Așadar, $x(t) = C_2 \sin lt$ cu $l \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Constanta C_2 se determină din condițiile $\int_0^\pi x(t)^2 dt = 1$; se obține $C_2 = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Extremalele se află printre curbele $x(t) = \pm \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin lt$ cu $l = 1, 2, 3, \dots$

28. Se cer extremalele funcționalei

$$J(y(\cdot), z(\cdot)) = \int_0^1 (y'^2(x) + z'^2(x) - 4xz'(x) - 4z(x))dx,$$

cu condițiile

$$\int_0^1 (y'^2(x) - xy'(x) - z'^2(x))dx = 2, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad z(1) = 1.$$

Soluție. Lagrangianul este

$$L = y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z + \lambda(y'^2 - xy' - z'^2)$$

și sistemul Euler-Lagrange devine

$$0 - \frac{d}{dx}(2y' + 2\lambda y' - \lambda x) = 0, \quad -4 - \frac{d}{dx}(2z' - 4x - 2\lambda z') = 0.$$

Evident $\lambda \neq \pm 1$ și rezultă $y = \frac{\lambda x^2}{4(\lambda + 1)} + C_1x + C_4$, $z = \frac{C_2}{1 - \lambda}x + C_3$. Cum $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, găsim $C_4 = 0$, $C_3 = 0$. Apoi $y(1) = 1$, $z(1) = 1$ și se află C_1, C_2 . În final, valorile (sau valoarea) lui λ se determină din condiția

$$\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2)dx = 2.$$

29. (Problema Didonei) Fie $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, cu $a > 0$, două puncte fixate. Dintre toate funcțiile $f : [-a, a] \rightarrow \mathbf{R}$, $f \geq 0$, de clasă C^2 , astfel încât $f(-a) = 0$, $f(a) = 0$, să se determine cea pentru care lungimea graficului este l (dată $l > 2a$) și aria dintre graficul lui f și axa Ox este maximă.

Soluție. Așadar, determinăm $y = f(x)$ pentru care $J(y(\cdot)) = \int_{-a}^a y(x)dx$ este maximă, cu legăturile $\int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2}dx = l$, $y(-a) = 0$, $y(a) = 0$. Considerăm Lagrangianul $L = y + \lambda\sqrt{1 + y'^2}$ și scriem ecuația Euler-Lagrange: $1 - \frac{d}{dx} \left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0$, deci $x - \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$, constant. Punem $y' = \operatorname{tg} t$. Deducem $x = C + \lambda \sin t$. Apoi $dy = y' \cdot dx = \operatorname{tg} t \cdot \lambda \cos t dt = \lambda \sin t dt$, de unde $y = C' - \lambda \cos t$. Se obține astfel familia de cercuri $(x - C)^2 + (y - C')^2 = \lambda^2$. Punând condițiile $y(-a) = 0$, $y(a) = 0$, rezultă $(-a - C)^2 + C'^2 = \lambda^2$, $(a - C)^2 + C'^2 = \lambda^2$, de unde $C = 0$ și $a^2 + C'^2 = \lambda^2$. Apoi $(y - C')^2 = \lambda^2 - x^2$, $y - C' = \pm \sqrt{\lambda^2 - x^2}$; rezultă $y' = \pm \frac{x}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}$, $1 + y'^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - x^2}$ și din condițiile $\int_{-a}^a \frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} = l$, găsim $2|\lambda| \arcsin \frac{a}{\lambda} = l$. Se obține soluția λ_0 deci C' și se precizează cercul-soluție.

30. Să se determine poziția de echilibru a unui fir greu, omogen, inextensibil, sub acțiunea gravitației.

Soluție. Reformulăm matematic problema. Fie $A(a, y_0), B(b, y_1)$ cu $a < b$ capetele firului. Dintre toate curbele $y = y(x)$ de clasă C^2 care unesc A, B și au lungimea dată, trebuie determinată cea pentru care ordonata centrului de masă este minimă. Așadar, punem condiția ca funcționala $\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$ să fie minimă, cu condițiile $\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx = l, y(a) = y_0$ și $y(b) = y_1$. Aplicând teorema 3, se consideră Lagrangianul $L = y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2}$. Acesta nu depinde explicit de x și putem folosi integrala primă a energiei $L - y'\frac{\partial L}{\partial y'} = C$. Așadar,

$$y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2} - y' \left(\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) = C$$

și după calcule, rezultă $y + \lambda = C\sqrt{1+y'^2}$. Punem $y' = \text{sh } t$ deci $y = -\lambda + C\text{ch } t$ deci $dx = \frac{dy}{y'} = \frac{C\text{sh } t dt}{\text{sh } t} = C dt$. Așadar, $x = Ct + C_1, y = -\lambda + C\text{ch } t$. Se obține o familie de curbe-lanțisor $y = -\lambda + C\text{ch} \frac{x - C_1}{C}$. Valorile lui C, C_1 și λ se determină din condițiile $y(a) = y_0, y(b) = y_1$ și $\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx = l$.

31. (Problema lui Kelvin) Pe planul xOy fixăm o distribuție de particule având o densitate continuă $\rho(x, y)$. Pe o curbă (C) , de clasă C^2 pe porțiuni, se fixează două puncte A, B și se pune problema ca dintre toate curbele care unesc A și B și au lungimea l dată, să se determine curba γ care împreună cu arcul \widehat{AB} al curbei (C) formează o regiune D de arie maximă.

Soluție. Fie $P(x, y)$ o funcție de clasă C^1 astfel încât $\frac{\partial P}{\partial x} = \rho$. Atunci

$$\iint_D \rho dx dy = \iint_D \frac{\partial P}{\partial x} dx dy = \int_{\gamma \cup C} P(x, y) dy.$$

Integrala $K = \int_{AB} P(x, y) dy$ este o constantă. Considerăm o parametrizare $x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$ pentru arcul γ . Atunci

$$\iint_D \rho dx dy = \int_a^b P(x(t), y(t)) \dot{y}(t) dt + K$$

și problema lui Kelvin revine la a determina maximul funcționalei

$$J(x, y) = \int_a^b P(x, y) \dot{y}(t) dt,$$

cu condiția $\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = l$. Se consideră Lagrangianul $L = P\dot{y} + \lambda\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$.
Sistemul Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0$$

devine

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = 0, \quad -\frac{d}{dt} \left(P + \frac{\lambda \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) = 0,$$

de unde

$$\frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = C_1, \quad P + \frac{\lambda \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = C_2.$$

Notând cu s abscisa curbilinie, rezultă $ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$, deci $\lambda \frac{dx}{ds} = C_1$,
 $P(x, y) + \lambda \frac{dy}{ds} = C_2$. Rezultă $x = C_1 s + C_3$ etc. Dacă ρ este constantă, atunci
 $P = \rho x = \rho(C_1 s + C_3)$ și rezultă $y = y(s)$, adică "ecuațiile naturale" ale curbei
 γ .

4 Condiții suficiente de extrem

32. Toate ecuațiile Euler-Lagrange considerate până acum reprezintă condiții necesare de extrem. Cunoașteți condiții suficiente?

Răspuns. Există mai multe condiții suficiente-Legendre, Weierstrass, etc.
Pentru funcționala $J(y(\cdot)) = \int_a^b f(x, y, y') dx$, cu condițiile $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, dacă $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} > 0$ pentru orice $x \in [a, b]$ în lungul unei extremale, atunci soluția ecuației Euler-Lagrange este un punct de minim. Aceasta este *condiția Legendre-Jacobi*. De exemplu, pentru $J(y) = \int_0^2 (y'^4 + y'^2) dx$ cu $y(0) = 1$, $y(2) = 7$, extremalele sunt $y = C_1 x + C_2$ deci $y = 3x + 1$. Dar $\frac{\partial f}{\partial y'} = 4y'^3 + 2y'$

și $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 12y'^2 + 2 > 0$; ca atare, $y = 3x + 1$ este funcția care da minimumul funcționalei.

33. a) Folosind condiția Lagrange, să se determine extremele pentru

$$J(y(\cdot)) = \int_0^1 (y'^2 + y^2 y') dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2.$$

b) Aceeași problemă pentru

$$J(y(\cdot)) = \int_1^2 (x^2 \cdot y'^2 + 12y^2) dx; \quad y(1) = 0, \quad y(2) = \frac{127}{16}.$$

Soluție. a) Folosim integrala primă a energiei: $y'^2 + y^2 y' - y'(2y' + y^2) = C$; rezultă $y' = C$ deci $y = Cx + C_1$. Punând condițiile la capete, rezultă $y = 2x$. Apoi $\frac{\partial f}{\partial y'} = 2y' + y^2$ și $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 2 > 0$ deci se îndeplinește condiția lui Legendre. Ca atare, $y = 2x$ este un punct de minim.

b) $L = x^2 y'^2 + 12y^2$; $\frac{\partial L}{\partial y} = 24y$, $\frac{\partial L}{\partial y'} = 2x^2 y'$ și ecuația Euler-Lagrange devine $24y - \frac{d}{dx}(2x^2 y') = 0$, adică $x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0$. Căutăm soluții de forma $y = x^r$ și rezultă $r(r-1) + 2r - 12 = 0$ deci $r_1 = 3$, $r_2 = -4$. Extremele posibile sunt $y = C_1 x^3 + C_2 x^{-4}$. Cum $y(1) = 0$, rezultă $C_2 = -C_1$ deci $y = C_1(x^3 - x^{-4})$. Apoi $y(2) = \frac{127}{16}$ deci $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ deci $y = x^3 - x^{-4}$. Condiția Legendre este îndeplinită deci am obținut un punct de minim.

5 Metoda Ritz

34. Ce știți despre metoda Ritz și despre metoda variațională?

Răspuns. Pentru determinarea, cu aproximație, a extremelelor unei funcționale $J(y(\cdot))$, se alege în mod convenabil funcții liniar independente

$$\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x),$$

sugerate de condițiile la capete sau de natura problemei. Se caută soluția $y(x)$ din spațiul liniar generat de $\varphi_k(x)$, adică $y(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x)$ și $J(y(x)) = F(C_1, \dots, C_n)$. Se pun condițiile necesare de extrem: $\frac{\partial F}{\partial C_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial C_n} = 0$,

de unde se determină C_1, \dots, C_n și soluția problemei. Aceasta este esența *metodei Ritz*. *Metoda variațională* se aplică unor ecuații diferențiale sau cu derivate parțiale, care trebuie identificate ca ecuații Euler-Lagrange asociate unor funcționale, cărora li se aplică apoi metoda Ritz.

35. Să se determine extremalele pentru

$$J(y(\cdot)) = \int_0^1 (y'^2 + y') dx; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

folosind *metoda Ritz* (alegând $\varphi_1(x) = 2x^2 - x$, $\varphi_2(x) = x^2$). Comparați cu ecuația Euler-Lagrange.

Soluție. Pornim cu $y = c_1(2x^2 - x) + c_2x^2$;

$$J(y(\cdot)) = \int_0^1 [(4c_1x - c_1 + 2c_2x)^2 + (4c_1x - c_1 + 2c_2x)] dx.$$

După calcule,

$$J(y(\cdot)) = \frac{7c_1^2}{3} + \frac{10c_1c_2}{3} + \frac{4c_2^2}{3} + c_1 + c_2 = F(c_1, c_2).$$

Se pun condițiile $\frac{\partial F}{\partial c_1} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial c_2} = 0$ etc. Aplicând integrala primă a energiei totale, rezultă $y' - y'(2y' + 1) = C$ deci $y' = C$, $y = Cx + C_1$ și soluția este $y = x$.

36. Să se determine, folosind metoda Ritz, soluția ecuației $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy$

în discul $D : x^2 + y^2 \leq 1$, nulă pe frontieră.

Soluție. Considerăm funcționala

$$J(u(\cdot)) = \iint_D (u_x^2 + u_y^2 + 2xyu) dx dy.$$

Ecuația Euler-Lagrange pentru J este tocmai ecuația dată. Alegem $\varphi_1 = x^2 + y^2 - 1$, $\varphi_2 = (x^2 + y^2 - 1)^2$ și $\varphi_3 = \ln(2 - x^2 - y^2)$. Căutăm soluția $u(x, y)$ ca o combinație liniară $u = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + c_3\varphi_3$ și după calcul efectiv, $J(u) = F(c_1, c_2, c_3)$. Se pun condițiile necesare $\frac{\partial F}{\partial c_1} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial c_2} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial c_3} = 0$; se determină c_1, c_2, c_3 și apoi u .

Metodele variaționale aplicate în practică necesită utilizarea compute-relor.

6 Probleme Sturm-Liouville

37. Soluțiile ecuației Sturm-Liouville

$$-\frac{d}{dx}(p(x) \cdot y') + q(x)y = r(x)$$

pe un interval $[a, b]$ cuprind extremalele funcționalei

$$J(y(\cdot)) = \int_a^b (py'^2(x) + qy^2(x) - 2ry(x)) dx.$$

Să se rezolve, folosind metoda variațională, ecuația diferențială $xy'' + y' - x^2y = 0$, cu condițiile $y(0) = 0, y(1) = 0$.

Soluție. Ecuația Sturm-Liouville este tocmai ecuația Euler-Lagrange pentru $J(y)$. Luând $p(x) = x, q = x^2, r = 0$, problema din enunț revine la determinarea extremalelor funcționalei $J(y) = \int_0^1 (xy'^2 + x^2y^2)dx$. Se consideră funcțiile liniar independente $\varphi_1(x) = x(1-x)$ și $\varphi_2(x) = x^2(1-x)$ și soluția căutată este $y = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$. Atunci $J(y) = F(C_1, C_2)$ etc.

7 Geodezice

38. Știți cum se determină geodezicele unei suprafețe? Care sunt geodezicele:
a) unui plan; b) unui cilindru circular drept; c) unei sfere?

Soluție. Dacă $S : \vec{r} = \vec{r}(u, v)$ este o suprafață dată parametric și dacă $\gamma : u = u(t), v = v(t)$ este o curbă situată pe S unind punctele pentru $t = a, t = b$ (neunică !), geodezicele sunt extremale ale funcționalei-distanță

$$J(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_a^b \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt,$$

unde $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u, F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v, G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$.

a) Considerăm planul $z = 0$. Atunci $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ deci $\vec{r}_x = \vec{i}, \vec{r}_y = \vec{j}, E = 1, F = 0, G = 1$ deci

$$J(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt.$$

Sistemul Euler-Lagrange devine $\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_1, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = c_2$ deci $\frac{dx}{ds} = c_1,$

$\frac{dy}{ds} = c_2$ ($s =$ arcul), de unde $x = C_1s + A, y = C_2s + B$ și eliminând parametrul

s, recunoaștem ecuația ecuația unei drepte din planul xOy . Deci geodezicele unui plan sunt dreptele situate pe plan.

b) Dacă $S : x^2 + y^2 = R^2$, punem $x = R \cos u$, $y = R \sin u$, $z = v$ deci

$$\vec{r} = R \cos u \vec{i} + R \sin u \vec{j} + v \vec{k}; \quad \vec{r}_u = -R \sin u \vec{i} + R \cos u \vec{j},$$

$\vec{r}_v = \vec{k}$ deci $E = R^2$, $F = 0$, $G = 1$. Funcționala-distanță este

$$J(u(t), v(t)) = \int_a^b \sqrt{R^2 \cdot \dot{u}^2 + \dot{v}^2} dt$$

etc. Geodezicele sunt fie dreptele verticale, fie elicele cilindrice (situate pe cilindru).

Dacă $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, considerăm parametrizarea $x = R \cos u \sin v$, $y = R \sin u \sin v$, $z = R \cos v$; rezultă $E = R^2 \sin^2 v$, $F = 0$, $G = R^2$ deci

$$J(u(\cdot), v(\cdot)) = R \int_a^b \sqrt{\sin^2 v \cdot \dot{u}^2 + \dot{v}^2} dt$$

etc. Se poate arăta că geodezicele sunt tocmai arce de cercuri mari (intersecțiile sferei cu plane care trec prin origine).

8 Control optimal

39. O particulă în mișcare rectilinie se află la momentul t în punctul $x(t)$; presupunem că $\ddot{x}(t) = u$, $u \in [-1, 1]$. Să se determine comanda u care aduce particula în timp minim în origine (adică în poziția $x = 0$).

Soluție. Notând $x_1 = x$, ecuația de mișcare a particulei este echivalentă cu sistemul diferențial $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = u$. Ecuația Bellman corespunzătoare este

$$\inf_{u \in [-1, 1]} \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \cdot x_2 + \frac{\partial T}{\partial x_2} \cdot u \right) = -1.$$

Marginea inferioară respectiv este atinsă pentru $u = -1$ (dacă $\frac{\partial T}{\partial x_2} > 0$) și $u = 1$ (dacă $\frac{\partial T}{\partial x_2} < 0$). Așadar, comanda optimală ia în mod necesar valorile $u = -1$ sau 1 .

40. Se consideră sistemul diferențial $\dot{x}_1 = x_2 + u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$ cu doi parametri de comandă u_1, u_2 satisfăcând condițiile $u_1, u_2 \in (-A, A)$. Să se determine

comenzile optime care fac ca sistemul să treacă în timp minim dintr-o stare (a, b) la momentul $t = 0$ în starea $(0, 0)$.

Soluție. Fie $H = p_1 \cdot (x_2 + u_1) + p_2 u_2$, unde $\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$ și $\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = p_1$. Atunci $p_1 = C$ și $p_2 = Ct + D$ cu C, D constante arbitare. Valorile cerute pentru u_1, u_2 sunt cele care fac maximă expresia

$$Cu_1 + (Ct + D)u_2,$$

cu condițiile $-A < u_1 < A$ și $-A < u_2 < A$.

Bibliografie

- [1] H. Cartan, *Calcul différentiel et formes différentielles*, Hermann, 1967.
- [2] I. M. Ghelfard, S. V. Fomin, *Calcul variațional* (limba rusă), Izd. Fiz-Mat., 1961.
- [3] M. Krasnov, G. I. Makarenko, A. I. Kiselev, *Problems and exercices in the calculus of variations*, Ed. Mir, 1975.
- [4] V. Olariu, T. Stănășilă, *Ecuatii diferențiale și cu derivate parțiale; probleme*, Ed. Tehnică, 1982.
- [5] I. Gh. Șabac, P. Cocârlan, O. Stănășilă, A. Topală, *Matematici speciale II*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
- [6] N. Teodorescu, V. Olariu, *Ecuatii diferențiale și cu derivate parțiale*, Ed. Tehnică, 1980.

INDEX

baloane de săpun	48
brachistochrona	39, 40
câmp central de forțe	55
câmp electromagnetic	74
câmp gravito-vortex	72
câmp giroscopic de forțe	74
cicloide	40, 101
coarda vibrantă	58
condiții de transversalitate	10, 20
condiții Dirichlet	20, 23, 61
condiții naturale	9, 19, 20
condiții Neumann	20, 23, 61
condiții Robin	61
conservarea energiei	55
conservarea momentului liniar	52
conservarea momentului unghiular	53
control optimal	130
deformații și tensiuni	89
diferențiala	1
derivata	1
dinamică geometrică	73, 76, 77, 81-83
dinamică Lagrangiană unitemporală	26, 27
dinamică Lagrangiană multi-temporală	28, 35
ecuații de echilibru Cauchy	90
ecuația diferențială Jacobi	25
ecuația Euler-Lagrange	9
ecuația Euler - Ostrogradski	12
ecuația Schrödinger	64
ecuația sine-Gordon	121

ecuația undelor	59, 63
energia potențială	41, 87
extremale	9, 11, 27, 29, 105
forțe de suprafață	87
forțe volumice	87
frânghii, lanțuri, cabluri	41, 95, 125
funcționala	2, 4, 7
geodezice	129
grinda încastrată	49
identitatea lui Lagrange	25
Lagrangianul funcționalei	2
lanțișor	42
legea Hooke	94
Legea Lorentz universală	75
Legea Newton	51
lema fundamentală	6
levitație magnetică	67
metoda Ritz	127
membrana vibrantă	61
microstructură evolutivă	50
minim, maxim, puncte de extrem	5, 19, 20, 21, 22
pendule	42-48
potențiale electromagnetice	78-81
principiul Hamilton	51, 58
probleme Sturm-Liouville	25, 129
punct critic	6, 27, 31, 59, 62
restricții izoperimetrice	123
senzori	69
spațiu dual	6
suprafețe extremale	12
suprafețe minimale	119

testul de invexitate	27, 30, 35
testul Legendre-Jacobi	16, 23, 40, 42, 49, 127
variația întâia	6
variația a doua	13
vânt	81, 82